Nivaldo A. Lemos

Convite à Física Matemática

Convite à Física Matemática

Nivaldo A. Lemos

Editora Livraria da Física
São Paulo — 2013

1a. Edição

Editor: José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Casa Editorial Maluhy & Co.
Capa: Antonio Manuel Alves Morais

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Lemos, Nivaldo A.
Convite à física matemática / Nivaldo A. Lemos. – 1. ed.
– São Paulo : Editora Livraria da Física, 2013.

Bibliografia.
ISBN 978-85-7861-192-7

1. Física Matemática I. Título.

13-02355 CDD-530.15

Índices para catálogo sistemático:
1. Física Matemática 530.15

ISBN 978-85-7861-192-7

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Editora Livraria da Física
Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413
www.livrariadafisica.com.br

O que pode ser provado não deve ser aceito na ciência sem prova.
J. W. Richard Dedekind

Não há nenhum ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa algum dia ser aplicado aos fenômenos do mundo real.
Nikolai I. Lobachevsky

Prefácio

Este livro, dirigido a estudantes de graduação e pós-graduação em Física, tem um duplo propósito: servir de introdução ao modo matemático de pensar e de iniciação à física matemática. Com isto em mente, as duas primeiras partes consistem numa introdução à lógica seguida de uma apresentação matematicamente rigorosa dos principais resultados do cálculo de funções de uma variável. A terceira parte é uma exposição das bases da análise funcional, com ênfase na teoria de operadores em espaços de Hilbert e aplicações à mecânica quântica.

As duas primeiras partes foram motivadas por uma assustadora constatação de longos anos de magistério superior: como regra, a bagagem matemática adquirida pelos estudantes nos cursos de graduação em Física no Brasil é paupérrima. Expostos quase exclusivamente aos algoritmos do cálculo diferencial e integral, que são adestrados a executar mecanicamente sem compreender o seu real significado e com absoluto descaso por suas condições de validade, aos estudantes é sonegado o contato com Matemática de verdade. Não lhes é dada a oportunidade de apreciar o valor do raciocínio cuidadoso, da definição precisa, do argumento estrito. Mesmo alguns dos melhores estudantes se formam sem saber realizar uma demonstração e, pior, muitas vezes sem saber sequer em que consiste uma demonstração. São incapazes de distinguir um argumento meramente plausível de uma prova rigorosa. Quando instados a provar algo, é muito comum cometerem o mais primário de todos os erros lógicos: pressupor aquilo que deve ser provado (*petitio principii*). A falta de experiência com o raciocínio lógico e com a necessidade de justificar escrupulosamente as asserções faz com que tenham dificuldade para desenvolver uma

argumentação consistente e convincente, deficiência esta que compromete o futuro de todos aqueles que almejam perseguir a carreira de pesquisador.

Assim, as duas primeiras partes do livro visam preencher uma séria lacuna na formação matemática que costuma ser oferecida pelos cursos de graduação em Física. Os dois primeiros capítulos são uma espécie de curso relâmpago de alfabetização matemática. Uma vez aprendidas as estruturas básicas da linguagem matemática, a partir das quais constroem-se sentenças gramaticalmente corretas e significativas, mostra-se, nos cinco capítulos seguintes, como pode ser dada uma fundamentação rigorosa ao cálculo diferencial e integral de uma variável. Os sete primeiros capítulos, que compõem as duas primeira partes, poderiam constituir um curso de introdução à análise matemática para estudantes de Física.

A terceira parte pretende ser uma introdução à física matemática por meio de um dos seus ramos mais importantes, a saber: aplicações de análise funcional à mecânica quântica. Cumpre esclarecer que física matemática é aqui entendida em sua acepção moderna: investigação de processos físicos por métodos matemáticos rigorosos. Não há exagero em classificar a notável relação entre Física e Matemática como simbiótica, uma vez que o florescimento de cada uma das disciplinas é promovido pela fertilização mútua. A mecânica quântica estimulou o desenvolvimento da teoria de operadores em espaços de Hilbert. Esta teoria, por sua vez, fornece os fundamentos matemáticos da física quântica e, entre muitas outras coisas, ajuda a desfazer aparentes paradoxos da mecânica quântica que resultam da manipulação indiscriminada de operadores, conforme ilustrado no Capítulo 14. A física matemática contribui para o avanço tanto da Física quanto da Matemática, é bela, desafiadora e intelectualmente compensadora.

O leitor que já tiver o preparo adequado em análise matemática pode começar o seu estudo do Capítulo 8. Como na Parte III o uso da integral de Lebesgue é inevitável, o Apêndice A é dedicado a uma exposição, praticamente sem demonstrações, das ideias essenciais e dos principais resultados — tendo em vista as aplicações físicas — da teoria da integração de Lebesgue.

Sem abrir mão do rigor, o livro é elementar. Os problemas de modo geral são fáceis ou de grau moderado de dificuldade, com raros problemas realmente difíceis. Mas praticamente todos eles requerem justificativas cuidadosas e precisas, não cabendo manipulações puramente formais. Eis uma obviedade que,

no entanto, deve ser sempre repetida: não se aprende Matemática ou Física contemplativamente, só se aprende pondo a mão na massa, praticando. Daí ser essencial tentar resolver o máximo de problemas, que indicam como usar definições e teoremas, ajudam a reconhecer a necessidade de hipóteses, introduzem noções e resultados não incluídos no corpo do texto e, *last but not least*, dão a oportunidade de sentir o gosto da descoberta e o prazer de vencer um desafio. Os exercícios salpicados ao longo do texto são muito simples ou bastante diretos e buscam facilitar a assimilação das ideias e conceitos introduzidos, e todo leitor empenhado num estudo sistemático deve procurar resolvê-los ao primeiro encontro. Os pré-requisitos são modestos: cálculo de uma e várias variáveis, álgebra linear e um primeiro curso de mecânica quântica. O único pré-requisito adicional é o desejo de empreender um estudo sério de Matemática, o que inclui uma predisposição para exercitar intensamente os neurônios.

Os lemas, teoremas, corolários e definições são numerados consecutivamente em cada capítulo. Assim, por exemplo, o Teorema 10.20 sucede a Definição 10.19. Exemplos e exercícios são numerados independentemente em cada seção, de modo que o Exemplo 9.2.4 é o quarto exemplo da Seção 9.2 do Capítulo 9.

O presente texto é introdutório — não poderia deixar de sê-lo em vista da limitada competência do autor — e não tem a pretensão, nem de longe, de substituir os livros que discutem com muito mais profundidade e abrangência os diversos assuntos tratados. Por sua própria natureza invitatória, o livro não é autossuficiente: demonstrações muito difíceis ou muito longas são omitidas, mas sempre indica-se onde elas podem ser encontradas. Ao fim de cada capítulo são sugeridos textos para estudos adicionais — alguns deles verdadeiros clássicos cuja leitura é entusiasticamente recomendada — com o intuito de incentivar o leitor a buscar as fontes em que este livro se baseou e, assim, estender e aprofundar os seus conhecimentos. No fim do livro há uma Bibliografia mais extensa.

Versões preliminares deste livro foram utilizadas em cursos ministrados na Universidade Federal Fluminense a turmas mistas de estudantes de graduação e pós-graduação em Física. Por sua contribuição para o expurgo de erros, deficiências ou obscuridades do texto, agradecimentos especiais são devidos a Daniel Jost Brod. Os erros remanescentes são de inteira responsabilidade do autor.

Correções, críticas e sugestões são muito bem-vindas e podem ser enviadas ao seguinte endereço eletrônico: *nivaldo@if.uff.br*.

Se este texto consegue atingir, ao menos parcialmente, algum de seus talvez demasiadamente ambiciosos objetivos, cabe ao leitor decidir.

Niterói, julho de 2012
NIVALDO A. LEMOS

Sumário

Parte I. Rudimentos de Lógica e Teoria dos Conjuntos

Parte II. Tópicos de Análise

Parte I

Rudimentos de Lógica e Teoria dos Conjuntos

1

Lógica Matemática

Tijolo com tijolo num desenho lógico.
CHICO BUARQUE, *Construção*

Como observou com propriedade o eminente lógico polonês Alfred Tarski,[1] os conceitos da lógica permeiam toda a Matemática e as leis lógicas são constantemente aplicadas — consciente ou inconscientemente — nos raciocínios matemáticos (Tarski 1995). Essa constatação estende-se aos raciocínios desenvolvidos em todas as disciplinas científicas e, a rigor, em qualquer atividade humana.

1.1 *Sentenças Lógicas ou Proposições*

Considere as seguintes sentenças:

"Paris é a capital da França."
"A equação $x^2 - x - 2 = 0$ só tem soluções positivas."
"Todo centauro gosta de feijoada."
"Se 2+2=5 então a Lua é feita de queijo."

As duas primeiras afirmações são perfeitamente claras e, além disso, a primeira é verdadeira e a segunda é falsa ($x = -1$ é uma solução negativa). Quanto às duas últimas, decididamente são asserções que soam estranhas e parecem destituídas de sentido. Mas de agora em diante tentemos nos despir de quaisquer

1. Aristóteles, Gottlob Frege, Kurt Gödel e Alfred Tarski são considerados os maiores lógicos de todos os tempos.

preconceitos e procuremos examinar estas e outras sentenças à luz exclusivamente da lógica.

A Matemática ocupa-se apenas com **sentenças lógicas** ou **proposições**, isto é, sentenças declarativas que são verdadeiras ou falsas como uma questão de fato, não de opinião. São exemplos de proposições:

"Guimarães Rosa é um escritor brasileiro."
"Beethoven compôs nove sinfonias."
"2+1=4."
"Há uma infinidade de pares de números primos da forma $(p, p+2)$."

As duas primeiras são verdadeiras, a terceira é falsa e a última, referente a pares de números primos tais como 11 e 13, não se sabe hoje se é verdadeira ou falsa. A vasta maioria dos matemáticos — com a notável porém largamente minoritária exceção dos adeptos da escola intuicionista — admite irrestritamente o **princípio do terceiro excluído** (*tertium non datur*), segundo o qual se uma proposição não é verdadeira então é falsa, e vice-versa. Portanto, admitiremos que a sentença acima a respeito dos "primos gêmeos" é verdadeira ou falsa, embora talvez estejamos longe de descobrir qual das duas possibilidades prevalece.

Não são exemplos de proposições:

"Beethoven é o maior compositor de todos os tempos."
"Vai, Carlos! ser *gauche* na vida."
"Você foi bem na prova?"
"$x^2 - x > 3$."

A primeira delas, apesar de altamente respeitável, é uma opinião da qual alguns discordarão: há quem prefira Bach ou Mozart. As duas seguintes são uma frase imperativa e outra interrogativa, que não podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas. A última só torna-se verdadeira ou falsa quando algum valor é atribuído ao número real x — trata-se de um **predicado**, de uma **função sentencial** ou **função proposicional** contendo a **variável livre** x.

1.2 *Conectivos Lógicos*

Proposições podem ser combinadas para formar novas proposições por meio dos seguintes conectivos lógicos:

$\wedge$ = "e"; $\vee$ = "ou";

$\neg$ = "não";

$\rightarrow$ = "se, então" ou "implica";

$\leftrightarrow$ = "se e somente se".

Os símbolos $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ também são usados para indicar "implica" e "se e somente se", respectivamente, assim como $\sim$ é usado para "não", embora esta última notação esteja em desuso.

A **conjunção** de duas proposições P e Q é a proposição $P \wedge Q$, que lê-se "P e Q" e é verdadeira se P e Q são ambas verdadeiras, sendo falsa nos demais casos. Na linguagem corrente, o "e" não apenas estabelece uma ligação entre duas proposições, mas também pode indicar um vínculo causal entre elas. Por exemplo, "Sofreu um infarto e foi operado" não significa a mesma coisa que "Foi operado e sofreu um infarto". Na lógica matemática, o "e" não sugere nem requer nenhum nexo entre as proposições que conecta. A definição precisa de $P \wedge Q$ é dada pela seguinte **tabela-verdade** (ou **tabela de verdade**) :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Como todas as demais de sua espécie, esta tabela-verdade mostra se a proposição composta é verdadeira ou falsa para cada **valor-verdade** (ou **valor de verdade**) das proposições componentes. O valor-verdade de uma proposição é V se ela é verdadeira ou F se ela é falsa.

A **disjunção** de P e Q é a proposição $P \vee Q$, que lê-se "P ou Q" e é verdadeira quando P é verdadeira, Q é verdadeira ou P e Q são ambas verdadeiras, e é falsa somente quando P e Q são ambas falsas, conforme a seguinte tabela-verdade:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Na linguagem cotidiana o "ou" quase sempre diz respeito a duas possibilidades mutuamente exclusivas. Por exemplo, na sentença "Faça o dever de casa ou você ficará de castigo" está excluída a possibilidade de a criança fazer o dever de casa e mesmo assim ficar de castigo. Contrariamente a esse uso coloquial, na matemática o "ou" é sempre inclusivo.

A proposição $\neg P$ lê-se "não P" ou "não se tem P" e é falsa se P é verdadeira, e verdadeira se P é falsa:

P	$\neg P$
V	F
F	V

Evidentemente, na expressão em português da proposição $\neg P$ usam-se as regras gramaticais de boa construção da língua. Por exemplo, se P = "João gosta de abacaxi" então $\neg P$ = "João não gosta de abacaxi".

1.3 *Implicação*

A noção de **implicação** ou **condicional** é provavelmente a mais importante da lógica matemática. A ideia intuitiva da implicação $P \to Q$ é que sempre que P é verdadeira Q também é verdadeira. Numa implicação $P \to Q$ dizemos que P é o **antecedente** ou a **premissa** e Q é o **consequente** ou a **conclusão**. Além de "se P então Q" e "P implica Q" há várias outras formas de expressar a implicação $P \to Q$: "Q se P"; "P somente se Q"; "Q desde que P"; "dado P então Q"; "Q é necessário para P"; "P é suficiente para Q".

A sentença "Sempre que faz sol Luiza vai à praia" significa a mesma coisa que $P \to Q$, onde P = "Faz sol" e Q = "Luiza vai à praia"; já a sentença "Se chove Luiza não vai à praia" é equivalente a $R \to \neg Q$ com R = "Chove". Nas implicações que ocorrem na linguagem cotidiana costuma haver uma relação de causa e efeito entre o antecedente e o consequente. É por isto que frases como "Todo centauro gosta de feijoada" (equivalente a $P \to Q$ com P = "x é um centauro" e Q = "x gosta de feijoada") ou "Se $2+2=5$ então a Lua é feita de queijo" causam estranheza. Os lógicos estendem o uso da implicação a todos os casos, mesmo quando não há conexão alguma entre o antecedente e o consequente, de tal modo que a veracidade ou falsidade de uma implicação dependa unicamente da veracidade ou falsidade de suas componentes, e não de alguma "relação" entre seus significados intrínsecos. Isto liberta o

valor-verdade de uma implicação de fatores psicológicos e é conhecido como *implicação material*. A sentença "Se chover Paulo ficará em casa hoje à noite" deve ser falsa apenas na hipótese de hoje à noite chover e Paulo sair de casa. Caso não chova hoje à noite, a sentença deve ser considerada verdadeira independentemente de Paulo ter ou não permanecido em casa. A noção de implicação material é reforçada por sentenças lógicas tais como "Se $x > 7$ então $2x > 10$", onde x denota um número real arbitrário. Como esta proposição é verdadeira, devemos considerar verdadeiras as proposições "Se $6 > 7$ então $12 > 10$" e "Se $2 > 7$ então $4 > 10$", obtidas escolhendo $x = 6$ e $x = 2$. Em ambas o antecedente é falso e a proposição é verdadeira, independentemente do valor-verdade do consequente, que é verdadeiro no primeiro caso e falso no segundo. Em suma, a implicação $P \to Q$ é falsa unicamente quando P é verdadeira e Q é falsa, e é verdadeira em todos os demais casos. Isto é expresso pela seguinte tabela-verdade:

P	Q	$P \to Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Esta tabela-verdade mostra que a implicação $P \to Q$ é verdadeira sempre que P é falsa, independentemente do valor-verdade de Q. Assim, as sentenças aparentemente sem sentido "Todo centauro gosta de feijoada" e "Se $2 + 2 = 5$ então a Lua é feita de queijo" não apenas têm significado, como são logicamente verdadeiras: em ambos os casos o antecedente é falso, pois não existem centauros[2] e $2 + 2$ não é igual a 5. Isto pode ser interpretado da seguinte maneira: a partir de uma premissa falsa é possível demonstrar qualquer coisa, por mais absurda que seja. A este propósito, conta-se que, numa festa, o grande matemático inglês G. H. Hardy comentou que a partir de uma premissa falsa pode-se provar qualquer coisa. Incrédulo, um dos interlocutores de Hardy lançou-lhe o seguinte desafio: "$4 = 7$. Prove que eu sou o Papa." Hardy pensou um pouco e respondeu: "$4 = 7$. Subtraia 1 de ambos os membros desta equação. Isto dá $3 = 6$. Dividindo esta equação por 3 obtemos

2. Negar a sentença é afirmar que existe um centauro que não gosta de feijoada.

1 = 2 ou, equivalentemente, 2 = 1. Você e o Papa são dois, mas como 2 = 1, você é o Papa."

Embora logicamente corretas, implicações em que o antecedente é completamente desconexo do consequente não ocorrem na Matemática. Da mesma forma que na linguagem corrente, os teoremas afirmam algo a respeito dos conceitos ou objetos que estão presentes nas premissas.

Dadas as proposições P e Q, a **bi-implicação** (também chamada de **bicondicional**) $P \leftrightarrow Q$ lê-se "P se e somente se Q" e é verdadeira se P e Q são ambas falsas ou ambas verdadeiras, sendo falsa nos demais casos. Além de "se e somente se", a bi-implicação $P \leftrightarrow Q$ também é traduzida por "P é necessário e suficiente para Q". A definição precisa de $P \leftrightarrow Q$ é dada pela tabela-verdade abaixo:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Vale ressaltar que nas definições de termos ou de classes de objetos matemáticos o "se" costuma ser usado como sinônimo de "se e somente se".

Intuitivamente, a bi-implicação $P \leftrightarrow Q$ equivale à validade conjunta de $P \rightarrow Q$ e $Q \rightarrow P$, mas a noção de equivalência de duas proposições requer uma definição precisa.

1.4 *Tautologia e Equivalência Lógica*

Uma **tautologia** ou **verdade lógica** é uma proposição que é verdadeira independentemente do valor-verdade de cada uma de suas proposições componentes. Consequentemente, a tabela-verdade de uma tautologia conterá apenas V na coluna de seus valores-verdade. Por exemplo, $P \vee \neg P$ é uma tautologia, como pode ser comprovado pela seguinte tabela-verdade, onde os valores-verdade de $P \vee \neg P$ estão na coluna sob o conectivo $\vee$:

P	$\vee$	$\neg P$
V	V	F
F	V	V

Uma tautologia é como a fórmula algébrica $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, que é verdadeira para qualquer número real x. A propósito da tautologia $P \vee \neg P$, diz uma anedota que a esposa de um lógico acabara de dar à luz e um amigo perguntou a ele se era menina ou menino. "Sim", respondeu imediatamente o lógico.

Outra tautologia evidente, mas que é suficientemente importante para que mereça ser explicitada, envolve a dupla negação: $\neg(\neg P) \leftrightarrow P$. Esta tautologia é a manifestação do princípio do terceiro excluído. Portanto, as proposições P e $\neg(\neg P)$ são logicamente equivalentes.

Uma **contradição** ou **falsidade lógica** é uma proposição que é falsa independentemente do valor-verdade de cada uma de suas proposições componentes. Consequentemente, a tabela-verdade de uma contradição conterá apenas F na coluna de seus valores-verdade. Por exemplo, $P \wedge \neg P$ é uma falsidade lógica, como se pode comprovar pela tabela-verdade abaixo:

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	F	F
F	V	F

Duas proposições P e Q são **logicamente equivalentes** se $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia, e escrevemos $P \Leftrightarrow Q$. Uma tautologia de fácil constatação é $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$, de modo que temos a equivalência lógica $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$.

Podemos, agora, referendar nossa intuição e provar rigorosamente que

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

por meio de uma tabela-verdade:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

A última coluna desta tabela foi obtida a partir da terceira e da sexta usando a definição de bi-implicação.

Exercício 1.4.1
Prove que $P \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$ é uma tautologia.

Se duas proposições são logicamente equivalentes, uma é verdadeira se e somente a outra é verdadeira e a prova da validade de uma delas pode ser realizada provando a validade da outra. Esta observação simples é extremamente valiosa para a demonstração de teoremas.

Dada uma implicação $P \rightarrow Q$ há outras três implicações relacionadas:

Recíproca: $Q \rightarrow P$
Inversa: $\neg P \rightarrow \neg Q$
Contrapositiva: $\neg Q \rightarrow \neg P$

Tanto a inversa quanto a recíproca são independentes da proposição original — certifique-se disto construindo as tabelas-verdade correspondentes. A contrapositiva, no entanto, é logicamente equivalente à proposição original, como se depreende da tabela-verdade que se segue:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Esta equivalência é de valor inestimável para a demonstração de teoremas.

A conjunção e a disjunção são comutativas e associativas:

$$P \wedge Q \Longleftrightarrow Q \wedge P, P \wedge (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R; \qquad 1.1$$

$$P \vee Q \Longleftrightarrow Q \vee P, P \vee (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \vee R. \qquad 1.2$$

Estas equivalências são de fácil comprovação.

Uma equivalência lógica importante envolve a implicação. Considere a seguinte afirmação: "Se faz calor eu ligo o ventilador." Isto é da forma $P \rightarrow Q$ onde P = "faz calor" e Q = "eu ligo o ventilador". Mas o mesmo pode ser dito de outra maneira: "o calor não me pegará com o ventilador desligado".

Isto corresponde a $\neg(P \wedge \neg Q)$, que equivale a $\neg P \vee Q$. Temos, portanto, as equivalências

$$P \to Q \Longleftrightarrow \neg P \vee Q \Longleftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q), \qquad 1.3$$

que o leitor deve verificar por meio de uma tabela-verdade.

1.5 *Argumentos Válidos e Falácias*

Um **argumento** é uma sequência finita de proposições em que a última é chamada de **conclusão** e as demais são chamadas de **premissas.** As premissas de um argumento são consideradas **justificativas** para a conclusão. Eis um exempo clássico de argumento:

Todos os homens são mortais.
Sócrates é homem.
Logo, Sócrates é mortal.

Um argumento é **válido** se a conclusão decorre necessariamente das premissas, isto é, se for impossível que a conclusão seja falsa caso se admita que as premissas são verdadeiras. Aquilo que um lógico chama de argumento corresponde ao enunciado de um **teorema**; a justificação da validade do argumento é o que os matemáticos chamam de **demonstração** ou **prova** do teorema.

Se não for válido, um argumento será dito **inválido.** Um argumento inválido também costuma ser chamado de **falácia.** Considere o seguinte argumento:

Sempre que janta num restaurante italiano, Mário bebe um bom vinho. Ontem à noite Mário bebeu um bom vinho. Logo, ontem à noite Mário jantou num restaurante italiano.

Este argumento exemplifica uma falácia muito comum, conhecida como falácia da recíproca: se $P \to Q$ não se pode concluir que $Q \to P$. Ontem Mário pode ter bebido um bom vinho na sua própria casa.

Outro tipo de falácia consiste em partir de uma premissa que pode ser falsa para provar uma afirmação, e está presente numa forma popular, porém incorreta, de verificar se uma equação é satisfeita. Exemplo: mostrar que $x = 2$ é solução de $x^3 - 3x - 2 = 0$. Verificação correta:

$$x = 2 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 2^3 - 3 \times 2 - 2 = 8 - 6 - 2 = 2 - 2 = 0.$$

Verificação incorreta: se $x = 2$ então

$$x^3 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow 2^3 - 3 \times 2 - 2 = 0 \Rightarrow 8 - 6 - 2 = 0 \Rightarrow 2 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Esta verificação é considerada concluída com sucesso por ter "provado" que $0 = 0$. Para início de conversa, não há dúvida de que $0 = 0$. Convenhamos, provar que $0 = 0$ não pode ser o objetivo de alguém que esteja em seu juízo perfeito. A "lógica" por trás deste raciocínio parece ser a seguinte: se chegamos à equação correta $0 = 0$ é porque aquilo que queríamos mostrar é verdadeiro. Isto é um erro crasso, como demonstra a tabela-verdade da implicação: se o antecedente é falso não se pode inferir que o consequente é verdadeiro. Na verificação incorreta descrita acima começa-se escrevendo $x^3 - 3x - 2 = 0$ para $x = 2$, mas isto é exatamente o que se deseja verificar. O erro lógico de pressupor aquilo que se deseja provar é uma falácia tão grave que merece um nome em latim: *petitio principii.*[3] O mesmo gênero de raciocínio incorreto utilizado na verificação acima, calcado no erro lógico de admitir como verdadeiro exatamente aquilo que se quer provar, permite "demonstrar" o seguinte "teorema" extraordinário:

"Teorema" 1 *é o maior de todos os números naturais.*

"Demonstração". Seja n o maior de todos os números naturais. Como 1 é um número natural, $1 \leq n$. Por outro lado, n^2 também é um número natural, de modo que $n^2 \leq n$. Dividindo esta última desigualdade pelo número positivo n conclui-se que $n \leq 1$. De $n \leq 1$ e $n \geq 1$ conclui-se que $n = 1$ e a "demonstração" está completa.

Exercício 1.5.1
Identifique o erro na "demonstração" deste "teorema".

Certos argumentos podem apresentar problemas de natureza totalmente distinta, como o exemplo a seguir:

3. Petição de princípio.

Se Marcos come pizza, então ele bebe vinho. Se Marcos bebe vinho, então ele não come camarão. Se Marcos come pizza, então ele come camarão. Marcos come pizza. Portanto, Marcos come pizza de camarão.

Este argumento é válido porém inútil, porque as premissas são contraditórias. Com efeito, sejam P = "Marcos come pizza", V = "Marcos bebe vinho" e C = "Marcos come camarão". Temos, então, $P \to V$, $V \to \neg C$ e $P \to C$. Se P é verdadeira, deduz-se da primeira implicação que V é verdadeira e, em decorrência da segunda implicação, que $\neg C$ é verdadeira. Mas se P é verdadeira, infere-se da terceira implicação que C é verdadeira. Portanto, se P é verdadeira resulta a proposição $C \wedge \neg C$, que é falsa. Portanto, as premissas constituem um proposição falsa, e se o antecedente é falso segue-se que a implicação é verdadeira, independentemente do valor-verdade do consequente. Poderíamos substituir "Marcos come pizza de camarão" por "Marcos não come pizza de camarão", "Paris é a capital da China", "$2+2=4$", "$\pi = 0$", ou qualquer outra coisa, que a conclusão permaneceria válida. A moral da história é que devemos evitar argumentos cujas premissas sejam contraditórias, pois de tais premissas é possível inferir logicamente qualquer conclusão. Premissas contraditórias são ditas **inconsistentes,** e premissas que não são contraditórias são ditas **consistentes**. Conclusões extraídas de premissas inconsistentes não servem para absolutamente nada.

Um sistema axiomático é consistente se e somente se é impossível provar alguma proposição e sua negação a partir dos axiomas. Um problema importante de lógica matemática é o de demonstrar a consistência de um certo conjunto de axiomas, já que sistemas axiomáticos inconsistentes são inaceitáveis.

1.6 *Quantificadores*

Dado um predicado $P(x)$, obtemos proposições atribuindo valores à variável livre x. Por exemplo, se x denota um número real e $P(x)$ = "$x - 2 = 0$", resulta que $P(1)$ é falsa e $P(2)$ é verdadeira. Outra maneira de gerar proposições a partir de $P(x)$ é aprefixando-lhe as frases "para todo x" ou "existe um x tal que". No primeiro caso a proposição resultante é falsa e, no segundo, verdadeira.

Usa-se $\forall x$ para abreviar o **quantificador universal** "para todo x", "para qualquer x" ou "para cada x". Assim, $(\forall x)(x^2 + 1 > 0)$ se traduz por "para todo

x, $x^2+1>0$". Analogamente, $\exists x$ abrevia o **quantificador existencial** "existe um x tal que" ou "há pelo menos um x tal que", de modo que $(\exists z)(z^2+1<0)$ lê-se "existe um z tal que $z^2+1<0$". Sempre que quantificadores são usados está implícito um conjunto S, chamado de **universo do discurso**, ao qual pertencem todos os valores possíveis das variáveis sob consideração. Quando é necessário explicitar o conjunto S, escrevemos $\forall x \in S$ ou $\exists x \in S$. Por exemplo, a proposição $(\exists y \in S)(y^2+1=0)$ é falsa se S é o conjunto dos números reais, e verdadeira se S é o conjunto dos números complexos.

Considere a função proposicional $P(x,y)$ = "x escreveu y", onde x percorre o conjunto dos seres humanos vivos ou mortos e y percorre o conjunto dos livros. Se quantificamos x para formar $(\exists x)P(x,y)$ ainda resulta uma função proposicional contendo a variável y. Se substituirmos y por "Memórias Póstumas de Brás Cubas" encontraremos uma proposição verdadeira, que afirma que alguém escreveu "Memórias Póstumas de Brás Cubas" — no caso, Machado de Assis. Mas podemos também quantificar y e formar, por exemplo, $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$, isto é, "para cada y existe x tal que x escreveu y". Esta proposição é verdadeira, pois cada livro possui um autor. Considere, agora, a sentença $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$, em que a ordem dos quantificadores foi invertida, e que declara que "existe x tal que, para todo y, x escreveu y". Esta sentença é completamente diferente da anterior, pois afirma a existência de uma única pessoa que escreveu todos os livros. Trata-se, portanto, de uma proposição falsa. Este exemplo mostra que a ordem de quantificadores de tipos diferentes é crucial e não pode ser alterada, sob pena de modificar completamente o significado da proposição. Vejamos mais um exemplo, em que o universo do discurso é o conjunto dos números reais: a proposição $(\forall x>0)(\exists y)(x-y^2=0)$ afirma que dado um número real positivo x existe um número real y tal que $y^2=x$. Isto é verdade, pois basta escolher $y=\sqrt{x}$. No entanto, a proposição $(\exists y)(\forall x>0)(x-y^2=0)$ é falsa, pois afirma que um único número real y elevado ao quadrado é igual a qualquer número real x positivo arbitrariamente escolhido.

A ordem de quantificadores do mesmo tipo é irrelevante: $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$ significa exatamente a mesma coisa que $(\forall y)(\forall x)P(x,y)$; da mesma forma, $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$ é o mesmo que $(\exists y)(\exists x)P(x,y)$. Por isto, é costume abreviar $(\forall x)(\forall y)$ por $(\forall x,y)$, $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$ por $(\forall x,y,z)$ e assim por diante, com notação análoga para o quantificador existencial.

Os quantificadores são indispensáveis para livrar a Matemática das ambiguidades que assolam a linguagem coloquial. Considere a seguinte proposição:

Algum número natural é maior do que todo número real.

Esta asserção pode dar margem a duas interpretações: para uns, ela afirma que qualquer número real é menor do que um determinado número natural; para outros, declara que é possível encontrar um número natural maior do que qualquer número real escolhido. Na primeira interpretação a sentença é falsa e, na segunda, verdadeira. A ambiguidade é eliminada escrevendo $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{R}))(x > y)$, que corresponde à primeira interpretação e é falsa, ou $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{N})(x > y)$, que corresponde à segunda interpretação e é verdadeira.

1.7 *Negação de Sentenças Quantificadas*

A negação de sentenças desempenha um papel fundamental na demonstração de teoremas. Já vimos que $\neg(P \wedge Q)$ é logicamente equivalente a $(\neg P) \vee (\neg Q)$. A mais importante de todas as negações talvez seja a da implicação:

$$\neg(P \to Q) \Longleftrightarrow P \wedge (\neg Q) .$$

A equivalência destas sentenças pode ser facilmente comprovada por uma tabela-verdade:

P	Q	$P \to Q$	$\neg(P \to Q)$	$\neg Q$	$P \wedge (\neg Q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Esta tabela-verdade mostra que $\neg(P \to Q)$ e $P \wedge (\neg Q)$ são ambas falsas ou ambas verdadeiras, ou seja, são equivalentes.

A negação da bi-implicação é

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) . \qquad 1.4$$

Isto pode ser demonstrado de modo simples sem recorrer a uma tabela-verdade. Sabemos que $P \leftrightarrow Q \Longleftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$, donde $\neg(P \leftrightarrow Q) \Longleftrightarrow$

$\neg((P \to Q) \wedge (Q \to P))$. Levando em conta que $\neg(R \wedge S) \Longleftrightarrow (\neg R) \vee (\neg S)$, temos

$$\begin{aligned} \neg(P \leftrightarrow Q) &\Longleftrightarrow (\neg(P \to Q)) \vee (\neg(Q \to P)) \\ &\Longleftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \\ &\Longleftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)\,, \end{aligned} \tag{1.5}$$

onde usamos a óbvia comutatividade da conjunção : $P \wedge Q \Longleftrightarrow Q \wedge P$.

Vejamos o caso de sentenças quantificadas. Por exemplo,

$$\neg\,[(\exists x)P(x)] \Longleftrightarrow (\forall x)(\neg P(x))\,. \tag{1.6}$$

Em palavras: negar a existência de um x tal que $P(x)$ é verdadeira é o mesmo que afirmar que $P(x)$ é falsa para todo x. De modo análogo,

$$\neg\,[(\forall x)P(x)] \Longleftrightarrow (\exists x)(\neg P(x))\,, \tag{1.7}$$

ou seja, negar que $P(x)$ é verdadeira para todo x é o mesmo que afirmar a existência de um x para o qual $P(x)$ é falsa.

Consideremos o caso mais complicado de negar a sentença $(\forall x)(\exists y)(\forall z)$ $P(x,y,z)$:

$$\begin{aligned} \neg\left[(\forall x)(\exists y)(\forall z)P(x,y,z)\right] &\Longleftrightarrow (\exists x)\neg\left[(\exists y)(\forall z)P(x,y,z)\right] \\ &\Longleftrightarrow (\exists x)(\forall y)\neg\left[(\forall z)P(x,y,z)\right] \\ &\Longleftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\exists z)\neg P(x,y,z)\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Note que os quantificadores $\exists$ e $\forall$ foram intercambiados e a função proposicional foi negada. Esta é uma regra geral: para negar uma sentença quantificada, faça o intercâmbio dos símbolos $\exists$ e $\forall$ e anteponha o símbolo $\neg$ à função proposicional.

Exemplo 1.7.1

Como veremos no Capítulo 4, dizer que uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reais é convergente significa:

$$(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Longrightarrow |a_n - a| < \epsilon)\,. \tag{1.9}$$

Como quantificar a sentença "a sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ não é convergente"? De acordo com a regra acima, devemos escrever

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(n > N \text{ e } |a_n - a| \geq \epsilon)\,,$$

onde usamos o fato de $P \wedge \neg Q$ ser a negação de $P \rightarrow Q$.

A sentença (1.9) também pode ser expressa como

$$(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(|a_n - a| < \epsilon)\,,$$

cuja negação é

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N)(|a_n - a| \geq \epsilon)\,.$$

1.8 *Métodos de Demonstração de Teoremas*

Tecnicamente, um **teorema** é uma sentença matemática para a qual existe uma prova, de modo que a sentença é verdadeira. Na prática dos matemáticos, a palavra "teorema" é reservada para sentenças não triviais e tidas como importantes. Um **lema** é um teorema considerado de menor importância cujo único propósito é ajudar a provar uma sentença mais importante, esta sim classificada como teorema. Frequentemente usa-se **proposição** para designar um teorema interessante mas que acredita-se não ser suficientemente significativo para merecer o nobre título de teorema. Uma consequência imediata ou quase imediata de um teorema é um **corolário**,[4] cuja demonstração, baseada no teorema que o antecede, é muito simples ou óbvia, e neste último caso é omitida.

A demonstração de um teorema baseia-se numa certa coleção de **regras de inferência**. As principais regras de inferência são de fácil aceitação, pois refletem nossa intuição mais primitiva, e algumas delas foram batizadas com charmosos nomes em latim.

Modus Ponens. Das premissas $P \rightarrow Q$ e P infere-se a conclusão Q.
Modus Tollens. Das premissas $P \rightarrow Q$ e $\neg Q$ infere-se $\neg P$.
Modus Tollendo Ponens. Das premissas $P \vee Q$ e $\neg P$ infere-se Q.
Modus Tollendo Ponens. Das premissas $P \vee Q$ e $\neg Q$ infere-se P.

4. "Coroa de flores", "prêmio" ou "presente", na acepção original em latim.

Estas regras de inferência correspondem às seguintes tautologias:

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q; \tag{1.10}$$

$$(P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q) \rightarrow \neg P; \tag{1.11}$$

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P) \rightarrow Q; \tag{1.12}$$

$$(P \vee Q) \wedge (\neg Q) \rightarrow P. \tag{1.13}$$

Uma lista extensa, mas ainda assim incompleta, de regras de inferência pode ser encontrada em Bloch (2000). Dado o seu caráter intuitivo, as regras de inferência passarão a ser usadas livremente sem menção explícita.

O enunciado de qualquer teorema é invariavelmente da forma $P \rightarrow Q$ ou $P \leftrightarrow Q$, ou pode ser reduzido a uma destas formas. Para provar uma implicação basta considerar o caso em que o antecedente é verdadeiro e deduzir que o consequente é verdadeiro, já que se o antecedente é falso a implicação é automaticamente verdadeira. A prova da bi-implicação $P \leftrightarrow Q$ exige demonstrações separadas das implicações $P \rightarrow Q$ e $Q \rightarrow P$. Há três métodos de demonstração de teoremas:

(i) **prova direta**;
(ii) **prova por contraposição** ou **pela contrapositiva**;
(iii) **prova por contradição** ou **por redução ao absurdo** (*reductio ad absurdum*).

PROVA DIRETA

Dado um teorema da forma $P \rightarrow Q$, a prova direta é a mais simples de todas e consiste em começar com P e deduzir Q. Em outras palavras, para provar que $P \rightarrow Q$, suponha que P é verdadeira e deduza, usando as regras de inferência, que Q é verdadeira.

Qualquer teorema é precedido por definições dos termos empregados e de suas propriedades, usualmente por meio de axiomas. Frequentemente uma definição estabelece um significado preciso para um termo de nossa linguagem cotidiana. Quando um palavra com a qual já estamos familiarizados é encontrada num texto científico, em vez de atribuir-lhe o significado que pensamos ser correto devemos recorrer à sua definição para entender o significado preciso do termo. Em qualquer texto científico prevalece o princípio de Humpty Dumpty:

> "When I use a word," Humpty Dumpty said, in rather a scornful tone, "it means what I choose it to mean — neither more nor less."
>
> Lewis Carroll,
> *Through the Looking Glass and What Alice Found There*

Os principais conjuntos numéricos que usaremos são o conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}, \tag{1.14}$$

o conjunto dos números naturais acrescido do zero

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0,1,2,3,\ldots\}, \tag{1.15}$$

o conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}, \tag{1.16}$$

o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, cujas propriedades básicas serão supostas conhecidas. Às vezes fingiremos desconhecer algumas dessas propriedades para ilustrar técnicas de demonstração de teoremas.

Definição 1.1 *Um número inteiro n é **par** se existe um número inteiro k tal que $n = 2k$. Um número inteiro n é **ímpar** se existe um número inteiro k tal que $n = 2k+1$.*

É intuitivamente óbvio, e pode ser provado rigorosamente, que qualquer número inteiro é par ou ímpar,[5] de modo que usaremos este resultado no que se segue.

Teorema 1.2 *Seja n um número inteiro. Se n é par então $(n+1)^2$ é ímpar.*

Demonstração. Se n é par, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Portanto, $(n+1)^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$. Como $2k^2+2k$ é um número inteiro, segue-se que n^2 é ímpar, isto é, a conclusão é verdadeira. ∎

5. A necessidade de provar algo tão evidente, que os antigos não reconheciam, reflete a sofisticação de um período bastante recente da história da Matemática, em que a importância e a delicadeza das hipóteses iniciais tornaram-se muito mais claras. Não raro afirmações "óbvias" são falsas, daí a necessidade de provar todas as afirmações, mesmo aquelas aparentemente óbvias.

Definição 1.3 *Um número x é dito* **racional** *se existem números inteiros p e q, com $q \neq 0$, tais que $x = p/q$. Se um número real não é racional então ele é dito* **irracional**.

Teorema 1.4 *Se x e y são racionais então $x + y$ é racional.*

Demonstração. Como x e y são racionais, existem inteiros p, q, m e n, com $q \neq 0$ e $n \neq 0$, tais que $x = p/q$ e $y = m/n$. Consequentemente,

$$x + y = \frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + qm}{qn},$$

onde $(pn + qm) \in \mathbb{Z}$ e $qn \in \mathbb{Z}$. Além disso, $qn \neq 0$ porque $q \neq 0$ e $n \neq 0$. Logo, $x + y$ é racional e a demonstração está completa. ∎

PROVA POR CONTRAPOSIÇÃO

A prova direta nem sempre é viável. Por exemplo, suponha que se queira provar que se n^2 é ímpar então n é ímpar. A prova direta começa supondo que o antecedente da implicação é verdadeiro, isto é, que n^2 é ímpar. Então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n^2 = 2k + 1$, donde $n = \pm\sqrt{2k+1}$. E daí? A partir desta expressão para n está longe de ser claro que se possa concluir que n é ímpar, e a tentativa de prova direta dá com os burros n'água.

A prova por contraposição (ou pela contrapositiva) baseia-se na equivalência lógica entre $P \rightarrow Q$ e sua contrapositiva $\neg Q \rightarrow \neg P$. A prova por contraposição consiste em começar com $\neg Q$ e deduzir $\neg P$, isto é, supor que o consequente é falso e deduzir a falsidade do antecedente.

Teorema 1.5 *Se n^2 é ímpar então n é ímpar.*

Demonstração. Negue o consequente, isto é, suponha que n não é ímpar. Portanto, n é par e existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Segue-se que $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$ onde $k' = 2k^2 \in \mathbb{Z}$. Logo, n^2 é par, ou seja, n^2 não é ímpar. Isto nega o antecedente e conclui a demonstração. ∎

Teorema 1.6 *Sejam x e y números reais positivos. Se $\sqrt{xy} \neq (x + y)/2$ então $x \neq y$.*

Demonstração. Suponha que o consequente seja falso, de modo que $x = y$. Neste caso,

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x^2} = x = \frac{x + x}{2} = \frac{x + y}{2}$$

e o antecedente é falso, completando a demonstração. ∎

Exercício 1.8.1
Prove que se x^2 é irracional então x é irracional.

PROVA POR *Reductio ad Absurdum*
A prova por contradição ou por redução ao absurdo é um método de demonstrar um teorema da forma $P \to Q$ que toma por base a equivalência lógica $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$. Suponha que possamos provar a falsidade de $P \wedge \neg Q$. Então concluiremos que $\neg(P \to Q)$ é falsa e, pelo princípio do terceiro excluído, que $P \to Q$ é verdadeira. A técnica de demonstração por redução ao absurdo consiste em supor que $P \wedge \neg Q$ é verdadeira e desta hipótese deduzir uma contradição (ou falsidade lógica). Disto se conclui que $P \wedge \neg Q$ é falsa, porque uma implicação só pode ser verdadeira com o consequente falso (no caso, a contradição) se o antecedente também for falso.

Algumas das mais importantes e impressionantes demonstrações da história da Matemática valem-se da redução ao absurdo, cuja essência é capturada nesta magnífica imagem poética de um matemático de alta classe:

> *Reductio ad absurdum*, which Euclid loved so much, is one of a mathematician's finest weapons. It is a far finer gambit than any chess gambit: a chess player may offer the sacrifice of a pawn or even a piece, but a mathematician offers *the game*.
>
> G. H. HARDY, *A Mathematician's Apology*

Sherlock Holmes também entendia perfeitamente o espírito da coisa:

> How often have I said to you that when you have eliminated the impossible, whatever remains, *however improbable*, must be the truth? ARTHUR CONAN DOYLE, *The Sign of the Four*

Há indícios de que a matemática demonstrativa tenha nascido na Grécia antiga com Tales de Mileto e a escola pitagórica, há mais de 2500 anos (Boyer & Merzbach 1991; Eves 1990a, 1990b; Struik 1967). Conta-se que Tales e Pitágoras teriam viajado ao Egito e à Babilônia para adquirir os conhecimentos daquelas civilizações. Uma das grandes realizações dos pitagóricos foi a prova de um resultado que para eles se revelou chocante: a diagonal de um

quadrado cujo lado mede uma unidade não pode ser expressa como a razão de dois números inteiros. A descoberta dos números irracionais desencadeou uma crise na confraria pitagórica, pois abalou a crença básica da escola de que tudo dependia de números inteiros. Além disso, invalidou a definição pitagórica de proporção, que supunha a comensurabilidade de duas grandezas quaisquer. Tamanho foi o impacto que a irmandade tentou evitar que a notícia da descoberta transpirasse. Diz a lenda que o pitagórico Hipaso foi banido (ou jogado ao mar, segundo outra versão) por ter revelado o segredo a estranhos, e que lhe foi erigido um túmulo como se estivesse morto.

A prova abaixo da irracionalidade de $\sqrt{2}$ é seguramente uma das mais belas de todas as demonstrações da Matemática.

Teorema 1.7 *O número $\sqrt{2}$ é irracional.*

Comentário. Este teorema pode ser posto na forma padrão $P \to Q$ definindo P = "x é um número positivo tal que $x^2 = 2$" e Q = "x é irracional".

Demonstração. Suponha $P \wedge \neg Q$, isto é, $x^2 = 2$ e x é racional. Há, portanto, inteiros p e q, com $q \neq 0$, tais que $x = p/q$. Podemos supor que p e q não possuem fator comum pois, do contrário, podemos dividir o numerador e o denominador pelo fator comum e reduzir a fração p/q à sua forma mais simples. Suponhamos que isto tenha sido feito, de modo que p e q não possuem nenhum fator comum. Já que $x^2 = 2$, temos $(p/q)^2 = 2$ ou $p^2 = 2q^2$. Portanto p^2 é par, de modo que p também é par. Logo, existe um inteiro m tal que $p = 2m$ e, em consequência, $4m^2 = 2q^2$ ou, ainda, $q^2 = 2m^2$. Isto mostra que q^2 é par e, portanto, q é par. Eis a contradição: p e q não têm fator comum e têm o fator comum 2, pois são ambos pares. Portanto, x não é racional. ∎

Definição 1.8 *Um número inteiro $p > 1$ é **primo** se 1 e p são os únicos inteiros positivos pelos quais p é divisível.*

Um número inteiro $n > 1$ é dito **composto** se pode ser escrito na forma $n = rs$, onde r e s são números inteiros maiores do que 1 e menores do que n. Portanto, um número inteiro $p > 1$ que não é primo é composto, e vice-versa. Segundo o teorema fundamental da aritmética, qualquer número composto pode ser expresso de maneira única como um produto de fatores primos.

Um dos mais célebres teoremas da história da Matemática afirma que há uma infinidade de números primos. Este fato foi provado há cerca de

2300 anos por Euclides (Proposição 20 do Livro IX dos *Elementos*). A demonstração de Euclides, por redução ao absurdo, é considerada um modelo de elegância e concisão, e rivaliza em beleza com a prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Teorema 1.9 (Euclides) *Há uma infinidade de números primos.*
Comentário. O enunciado deste teorema pode ser reduzido à forma padrão $P \to Q$ tomando $P =$ "X é o conjunto dos números primos" e $Q =$ "X possui um número infinito de elementos".
Demonstração. Suponha $P \wedge \neg Q$, isto é, há apenas um número finito de números primos $p_1, p_2, \ldots, p_N$, que supomos dispostos em ordem crescente. A ideia da demonstração consiste em, a partir de $p_1, p_2, \ldots, p_N$, fabricar um número que gera uma contradição tanto na hipótese de ser primo quanto na hipótese de ser composto. Para tanto, considere o número $q = p_1 p_2 \ldots p_N + 1$, formado acrescentando-se a unidade ao produto de todos os números primos. O número q é maior do que qualquer um dos números primos e não é divisível por nenhum deles: por exemplo, $q/p_1 = p_2 p_3 \ldots p_N + 1/p_1$ não é inteiro porque $p_1 \geq 2$. Como $q > p_N$, se q é primo existe um número primo maior do que p_N, o que é uma contradição já que, por hipótese, p_N é o maior de todos os números primos. Se q é composto, pelo teorema fundamental da aritmética possui um fator primo que, como vimos, não pode ser nenhum dos primos $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Portanto, existe um número primo maior do que p_N e a contradição se repete. Em qualquer caso, a suposição inicial de que o conjunto dos números primos é finito engendra uma contradição. Portanto, o conjunto dos números primos é infinito. ∎

Comentário. Há matemáticos que recomendam, sempre que possível, evitar provas por contradição porque elas muitas vezes não esclarecem a conexão lógica entre o antecedente P e o consequente Q, ao passo que tanto a prova direta quanto a prova por contraposição constroem uma cadeia de raciocínio lógico ligando P a Q.

Casos e Bi-implicações

Às vezes a premissa de uma implicação $P \to Q$ é da forma ou pode ser posta na forma $P = A \vee B$, e se desdobra em vários casos (podem ser mais do que dois casos se A ou B também forem sentenças compostas com o conectivo

$\vee$). Você é convidado a verificar que $(A \vee B) \to Q$ é logicamente equivalente a $(A \to Q) \wedge (B \to Q)$. Portanto, a demonstração de $P \to Q$ exige que se prove separadamente a proposição $A \to Q$ e a proposição $B \to Q$.

Teorema 1.10 *Seja n um número inteiro. Então $n^2 + n$ é par.*
Comentário. Note que a premissa $P =$ "$n \in \mathbb{Z}$" é equivalente a $P = A \vee B$ onde $A =$ "n é par" e $B =$ "n é ímpar". No futuro, não faremos essas identificações explicitamente e partiremos para a demonstração sem mais delongas.
Demonstração. Caso 1: n é par. Então $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Portanto,

$$\begin{aligned} n^2 + n &= 4k^2 + 2k \\ &= 2(2k^2 + k)\,. \end{aligned}$$

Como $(2k^2 + k) \in \mathbb{Z}$, segue-se que $n^2 + n$ é par.
Caso 2: n é ímpar. Por definição, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$, de modo que

$$\begin{aligned} n^2 + n &= (2k+1)^2 + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 6k + 2 \\ &= 2(2k^2 + 3k + 1)\,. \end{aligned}$$

Como $(2k^2 + 3k + 1) \in \mathbb{Z}$, resulta que $n^2 + n$ é par. ∎

Quando o enunciado de um teorema tem a forma de uma bi-implicação $P \leftrightarrow Q$, a demonstração exige que se prove separadamente a implicação $P \to Q$ e a recíproca $Q \to P$. Com muita frequência, o método usado para provar a proposição $P \to Q$ é diferente do empregado para provar a recíproca $Q \to P$. A bi-implicação "P se e somente se Q" costuma ser interpretada como "Q é necessária e suficiente para P", de modo que a implicação $P \to Q$ representa a parte "somente se" ou a "necessidade" ($\Rightarrow$), e a implicação $Q \to P$ representa a parte "se" ou "suficiência" ($\Leftarrow$).

Teorema 1.11 *Seja n um número inteiro. Então n é par se e somente se n^2 é par.*
Demonstração. Necessidade ($\Rightarrow$). Se n é par, existe um número inteiro k tal que $n = 2k$. Portanto, $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ donde se conclui que n^2 é par.
Suficiência ($\Leftarrow$). Queremos provar que se n^2 é par então n é par. Se n não é par, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$ e segue-se que $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, de modo que n^2 não é par. A suficiência está demostrada por contraposição. ∎

Teorema 1.12 *Sejam a e b números racionais positivos. Então $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ é racional se e somente se $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ são ambos racionais.*

Demonstração. Suficiência ($\Leftarrow$). Se $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ são ambos racionais, então $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ é racional pelo Teorema 1.4.

Necessidade ($\Rightarrow$). Como

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b,$$

se $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ é racional então $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ também é racional porque é o quociente de dois números racionais: $a-b$ e $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Portanto, $\sqrt{a}+\sqrt{b}=r_1$ e $\sqrt{a}-\sqrt{b}=r_2$, onde r_1 e r_2 são números racionais. Consequentemente,

$$\sqrt{a}=\frac{r_1+r_2}{2} \quad \text{e} \quad \sqrt{b}=\frac{r_1-r_2}{2},$$

de modo que $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ são ambos racionais. ∎

Este teorema estabelece, por exemplo, que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional.

Existência e Unicidade

Muitos teoremas importantes afirmam a existência de somente um objeto matemático com certas propriedades. A existência e a unicidade costumam ser provadas separadamente. Uma vez demonstrada a existência por qualquer método, a unicidade é provada tipicamente supondo que existem dois objetos com as referidas propriedades e, em seguida, mostrando que na verdade são o mesmo objeto.

Teorema 1.13 *A equação $x^3 = 8$ possui uma única solução positiva.*

Demonstração. A existência é imediata: $x = 2$ é solução positiva. Sejam, agora, u e v duas soluções positivas da equação. Então, de $u^3 = 2 = v^3$ deduz-se

$$u^3 - v^3 = 0 \implies (u^2+uv+v^2)(u-v) = 0.$$

Como $u^2+uv+v^2 > 0$ porque u e v são positivos, segue-se que $u = v$ e a unicidade fica estabelecida. ∎

Um exemplo não trivial é um simples e belo resultado devido a Fermat.

Teorema 1.14 (Fermat) *Todo número primo ímpar pode ser expresso como a diferença de dois quadrados de uma, e uma só, maneira.*

Demonstração. Se p é um primo ímpar, verifica-se imediatamente que

$$p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 .$$

Por outro lado, se $p = x^2 - y^2$ segue-se que $p = (x-y)(x+y)$. Como os únicos fatores de p são 1 e p, infere-se que $x-y=1$ e $x+y=p$, donde $x=(p+1)/2$ e $y=(p-1)/2$. ∎

CONTRAEXEMPLOS

Considere a afirmação de que todos os elementos de um determinado conjunto gozam de uma certa propriedade P, isto é, $(\forall x)P(x)$. Para prová-la temos que demonstrar que **todos** os elementos do conjunto possuem a propriedade P. No entanto, para refutá-la basta exibir **um** elemento do conjunto que não tenha a propriedade P. Um exemplo específico que demonstra a falsidade de uma proposição genérica é chamado de **contraexemplo**.

Os primeiros números da forma $2^p - 1$, onde p é um número primo, também são primos: $2^2 - 1 = 3$; $2^3 - 1 = 7$; $2^5 - 1 = 31$; $2^7 - 1 = 127$. Isto pode nos levar a pensar que todos os números da forma $2^p - 1$ são primos. Isto é falso, como mostra o seguinte contraexemplo: $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$. Em 1644, o monge Marin Mersenne afirmou que $2^p - 1$ é primo para $p = 2,3,5,7,13,17,19,31,67,127$ e 257. A afirmação de Mersenne também é falsa. Eis um contraexemplo, descoberto em 1903 pelo matemático americano Frank Nelson Cole:

$$\begin{aligned} 2^{67} - 1 &= 147573952589676412927 \\ &= 193707721 \times 761838257287 . \end{aligned}$$

Este resultado impressionante foi obtido por Cole depois de trabalhar nesta fatoração todas as tardes de domingo durante *duas décadas*!

1.9 *Indução Matemática*

A indução matemática é um método poderosíssimo de provar proposições a respeito de números naturais. Apesar do nome, a indução matemática não tem relação alguma com o método indutivo empregado nas ciências naturais, em que, a partir da observação de alguns exemplos particulares, leis gerais são propostas para descrever os fenômenos.

Suponha que se queira provar que uma certa proposição $P(n)$ é verdadeira para qualquer número inteiro positivo n. A demonstração direta pode ser difícil, mas em muitos casos pode ser realizada explorando a propriedade fundamental dos números naturais: cada número natural n possui um sucessor $n+1$, e se começarmos de 1 e considerarmos o seu sucessor, o sucessor do seu sucessor, e assim por diante, alcançaremos qualquer número natural.

Princípio da Indução Seja $P(n)$ uma função proposicional. Suponha que:

(1) $P(1)$ é verdadeira;

(2) $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Note que a segunda condição afirma apenas que se $P(k)$ é verdadeira então $P(k+1)$ também é verdadeira. Juntas, as duas condições permitem concluir que $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, se $P(1)$ é verdadeira, a segunda condição assegura que $P(2)$ é verdadeira; novamente pela segunda condição, $P(3)$ é verdadeira, e assim sucessivamente. O princípio da indução é um dos **axiomas de Peano**, por meio dos quais se define rigorosamente o conjunto dos números naturais.

Teorema 1.15 *A seguinte fórmula é válida para a soma dos n primeiros números naturais:*

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Demonstração. A fórmula vale para $n=1$: neste caso o primeiro e o segundo membros são ambos iguais a 1. Suponha a fórmula válida para $n=k$. Então temos

$$\begin{aligned}
1+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2},
\end{aligned}$$

que prova a validade da fórmula para $k+1$. Portanto, a fórmula é verdadeira para todo número natural n. ∎

Teorema 1.16 *Para qualquer número natural n, o número $8^n - 3^n$ é divisível por* 5.

Demonstração. A proposição é verdadeira para $n = 1$: $8-3 = 5$, que é divisível por 5. Hipótese da indução: $8^k - 3^k$ é divisível por 5, isto é, $8^k - 3^k = 5m$ para algum número inteiro m. Então temos

$$8^{k+1}-3^{k+1} = 8\times 8^k-3\times 3^k = 8\times(3^k+5m)-3\times 3^k = (8-3)\times 3^k+40m = 5(3^k+8m).$$

Como $3^k + 8m$ é um número inteiro, a proposição é verdadeira para $k+1$. Logo, é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

Teorema 1.17 (Desigualdade de Bernoulli) *Se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$ então*

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Demonstração. A desigualdade vale para $n = 1$ (torna-se uma igualdade). Suponha a desigualdade válida para $n = k$. Então, como $1 + x \geq 0$,

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x.$$

Portanto, a desigualdade vale para $k+1$ e, pelo princípio da indução, vale para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

Provas indutivas continuam sendo aplicáveis quando é necessário provar que uma proposição é verdadeira somente para os números naturais a partir de um certo número natural n_0.

Princípio da Indução: Variante 1 Seja $P(n)$ uma função proposicional e seja n_0 um número natural. Suponha que:

(1) $P(n_0)$ é verdadeira;

(2) $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todo número natural $k \geq n_0$.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq n_0$.

Teorema 1.18 *Para qualquer número natural $n \geq 4$ tem-se $2^n > 3n$.*

Demonstração. A proposição é verdadeira para $n = 4$, pois $2^4 = 16 > 12 = 3 \times 4$. Hipótese da indução: $2^k > 3k$. Então, com $k \geq 4$,

$$2^{k+1} = 2\times 2^k > 2\times(3k) = 3k+3k > 3k+3 = 3(k+1),$$

de modo que a proposição vale para $k+1$. A demonstração está completa. ∎

Em certos casos, a prova da validade de $P(k+1)$ pode exigir a hipótese de que $P(n)$ seja válida para todo número natural n desde $n=1$ até $n=k$.

Princípio da Indução: Variante 2 Seja $P(n)$ uma função proposicional. Suponha que:

(1) $P(1)$ é verdadeira;

(2) $P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Esta variante permite provar rigorosamente uma propriedade intuitiva dos números naturais.

Teorema 1.19 (Princípio da Boa Ordenação) *Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.*

Demonstração. Seja A um subconjunto de $\mathbb{N}$. Suponha que A não possui um menor elemento e seja $P(n)$ a afirmação "o número natural n não está em A." Então $P(1)$ é verdadeira, pois do contrário 1 seria o menor elemento de A. Suponha que $P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)$ seja verdadeira. Neste caso, $k+1$ não pode estar em A senão seria o seu menor elemento, de modo que $P(k+1)$ é verdadeira. Portanto, $P(n)$ é verdadeira para todo n, isto é, nenhum número natural está em A. Segue-se que A é vazio e o teorema está demonstrado pela contrapositiva. ∎

Há uma divertida "aplicação" do princípio da boa ordenação a uma prova de que todos os números naturais são interessantes, seja lá o que isto signifique. Os números primos certamente são interessantes, pois são os blocos de construção de todos os números naturais. Suponha que nem todos os números naturais são interessantes e considere o conjunto D dos números naturais desinteressantes. Pelo princípio da boa ordenação, D possui um menor elemento n_0. Veja só que número interessante, este n_0: é o menor de todos números naturais desinteressantes! Esta contradição prova o "teorema".

Finalmente, uma terceira variante do princípio da indução combina as duas primeiras.

Princípio da Indução: Variante 3 Seja $P(n)$ uma função proposicional e seja n_0 um número natural. Suponha que:

(1) $P(n_0)$ é verdadeira;

(2) $P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \cdots \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todo número natural $k \geq n_0$.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq n_0$.

Vale ressaltar que estas três variantes do princípio da indução não são novos axiomas, mas podem ser provadas como teoremas a partir do princípio da indução original.

Exercício 1.9.1
A partir do princípio da indução original, demonstre suas três variantes.

Teorema 1.20 *Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Então n é primo ou pode ser expresso como o produto de fatores primos.*

Demonstração. Recorreremos à terceira variante do princípio da indução com $n_0 = 2$. A proposição é verdadeira para $n = 2$, pois 2 é um número primo. Suponhamos que todos os números naturais do conjunto $\{2,3,\ldots,k\}$ sejam primos ou o produto de fatores primos. Se $k+1$ é primo não há nada a demonstrar. Se $k+1$ não é primo, então $k+1 = ab$, onde a e b são números naturais menores do que $k+1$. Como $a, b \in \{2,3,\ldots,k\}$, segue-se da hipótese da indução que tanto a quanto b são primos ou podem ser expressos como o produto de fatores primos, de modo que $k+1$ é o produto de fatores primos. A demonstração está completa. ∎

Este último teorema foi utilizado na demonstração do célebre Teorema 1.9, segundo o qual há uma infinidade de números primos.

Leituras Adicionais Selecionadas[6]

• Bloch, E. D. 2000 *Proofs and Fundamentals.*
Eccles, P. J. 1997 *An Introduction to Mathematical Reasoning.*
Kitchen, Jr., J. W. 1968 *Calculus of One Variable.*

6. A lista completa de referências, com plenos detalhes bibliográficos, encontra-se na Bibliografia no fim do livro. O símbolo • destaca obras cuja leitura é altamente recomendada.

Solow, D. 2005 *How to Read and Do Proofs.*
- Tarski, A. 1995 *Introduction to Logic and the Methodology of Deductive Sciences.*
- Velleman, D. J. 2006 *How To Prove It: A Structured Approach.*

Problemas

1.1. Seja $P|Q$ a proposição "P e Q não são ambas verdadeiras". (a) Construa a tabela-verdade de $P|Q$. (b) Obtenha uma fórmula equivalente a $P|Q$ usando apenas os conectivos $\vee$, $\wedge$ e $\neg$.

1.2. Alguma das fórmulas abaixo é equivalente a $P \to (Q \to R)$?
(a) $Q \to (P \to R)$.
(b) $(P \to Q) \wedge (Q \to R)$.
(c) $(P \wedge Q) \to R$.
(d) $P \to (Q \wedge R)$.

1.3. Sejam P e Q proposições *arbitrárias*. Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é uma tautologia. Se isto não lhe causa surpresa, experimente considerar P="Fulano é honesto" e Q="Fulano é assaltante de bancos".

1.4. Traduza para o português corrente as proposições abaixo.
(a) $(\forall x \in \mathbb{N})[(P(x) \wedge \neg(x = 2)) \to I(x)]$, onde $P(x)$ significa "x é primo" e $I(x)$ significa "x é ímpar".
(b) $(\forall x)[(P(x) \wedge \neg(\exists y)A(x,y)) \to \neg F(x)]$ onde $P(x)$ significa "x é uma pessoa", $A(x,y)$ significa "x e y são amigos" e $F(x)$ significa "x é feliz".

1.5. Usando $\mathbb{P}$ para indicar o conjunto das pessoas, $A(x,y)$ para denotar "x e y são amigos" e $D(x,y)$ para expressar "x e y moram em países distintos", represente em linguagem simbólica as seguintes afirmações: (a) todo mundo tem um amigo que mora em outro país; (b) alguma pessoa não tem amigos que moram no seu país.

1.6. Se o universo do discurso é $\mathbb{N}$, as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas?
(a) $\forall x \exists y (2x - y = 0)$.
(b) $\exists y \forall x (2x - y = 0)$.
(c) $\forall x \exists y (x - 2y = 0)$.

(d) $\forall x(x < 9 \to \forall y(y < 2x \to y \leq 15))$.
(e) $\exists x \exists y(x^2 + y^2 = 12)$.
(f) $\forall x \exists y(y > x \wedge \exists z(y + z = 100))$.

1.7. (a) Prove que $(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$ é equivalente a $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$. (b) Prove que $(\exists x)(P(x) \to Q(x))$ é equivalente a $(\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$. (c) Será que $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$ é equivalente a $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$? (d) Será que $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$ e $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$ são equivalentes? (e) E quanto a $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ e $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$?

1.8. Use as equivalências (1.3) para provar que $P \to (Q \to R)$ é equivalente a $\neg R \to (P \to \neg Q)$.

1.9. Negue a seguinte afirmação: para todo número real $\epsilon > 0$ existe um número real x tal que $|a_n - x| < \epsilon$ para todo número natural n.

1.10. (a) Se a é racional e b é irracional pode-se inferir que $a+b$ é irracional? E se a e b são ambos irracionais? (b) Se a é racional e b é irracional segue-se que ab é necessariamente irracional? (c) Existe um número a tal que a^2 é irracional mas a^4 é racional? (d) Existem dois números irracionais tais que sua soma e seu produto são ambos racionais?

1.11. Há algo de errado com o teorema a seguir e sua demonstração?

Teorema. Se $x \neq 1$ e $\dfrac{x^2+1}{x-1} = 5$ então $x = 3$.

Demonstração. Se $x = 3$ temos $\dfrac{x^2+1}{x-1} = \dfrac{9+1}{3-1} = \dfrac{10}{2} = 5$. Logo, se $\dfrac{x^2+1}{x-1} = 5$ então $x = 3$.

1.12. Sejam a, b, c e d números racionais. Prove que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ se e somente se $a = c$ e $b = d$.

1.13. Se $2^x = 3$, prove que x é irracional.

1.14. Prove a afirmação a seguir ou refute-a por meio de um contraexemplo: quaisquer que sejam os números inteiros x e y, existe um inteiro z tal que $z^2 + 2xz - y^2 = 0$.

1.15. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e n um inteiro positivo. (a) Prove a identidade algébrica

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

(b) Prove que se $2^n - 1$ é primo, então n é primo.

1.16. Seja n um inteiro ímpar. Prove que existe um inteiro k tal que $n^2 = 8k+1$.

1.17. Se a e b são números inteiros e b é ímpar, prove que ± 1 não são soluções de $ax^4 + bx^2 + a = 0$.

1.18. Sejam a, b e c números reais com $c \neq 0$. Prove que se $cx^2 + bx + a = 0$ não possui solução racional, então $ax^2 + bx + c = 0$ também não admite solução racional.

1.19. Sejam m e n inteiros, com n ímpar. Prove que a equação $x^5 + 2mx + 2n = 0$ não admite soluções racionais.

1.20. Prove que se $x = p + \sqrt{q}$ com p e q racionais, então, para todo número natural n, $x^n = a + b\sqrt{q}$ com a e b racionais.

1.21. Prove que

$$\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

é um número natural para todo número natural n.

1.22. Prove que

$$\left[\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\right]^2 < \frac{1}{2n+3}$$

para todo número natural n.

1.23. Prove que, para todo número natural n,

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

1.24. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \ldots + \operatorname{sen}(2n-1)x = \frac{1 - \cos 2nx}{2 \operatorname{sen} x}, \quad \operatorname{sen} x \neq 0.$$

1.25. Seja P_n a seguinte proposição:

$$1+2+\ldots+n=\frac{(n+2)(n-1)}{2}.$$

Prove que P_n implica P_{n+1}. Há algum número natural n para o qual P_n é verdadeira?

1.26. Considerando pequenos valores de n ou usando qualquer outro tipo de argumento, proponha fórmulas para os produtos

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) \quad \text{e} \quad \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

Prove suas conjecturas por indução.

1.27. Prove que, para todo número natural n,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq 2-\frac{1}{n}.$$

1.28. Prove que

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2.$$

1.29. Seja $N\geq 2$ um número natural. Prove que

$$\sum_{n=1}^{N-1}\frac{n!}{N!}\leq\frac{2}{N}.$$

1.30. Prove que o princípio da boa ordenação é equivalente ao princípio da indução. Sugestão: use redução ao absurdo.

2

Conjuntos e Funções

A essência da Matemática reside na sua liberdade.
GEORG CANTOR

Toda a matemática moderna é expressa na linguagem da teoria dos conjuntos. Adotaremos uma abordagem informal e intuitiva, conhecida como **teoria ingênua dos conjuntos** (Halmos 1974). Em contraste, a **teoria axiomática dos conjuntos** explicita todas as noções primitivas, que não são definidas, e os axiomas a partir dos quais todos os teoremas são provados (Suppes 1972).

2.1 *Conjuntos*

Um **conjunto** é uma coleção de objetos que podem ou não ser de natureza matemática: a coleção de troféus conquistados por um atleta é um conjunto tanto quanto a coleção dos números naturais. Os objetos que compõem um conjunto são chamados de **elementos** ou **membros** do conjunto. Se x é um elemento do conjunto A dizemos que x pertence a A e escrevemos $x \in A$. Se x não é um elemento de A escrevemos $x \notin A$.

A igualdade de conjuntos é definida pelo chamado **axioma da extensão.**

Definição 2.1 *Dois conjuntos são iguais se e somente se possuem os mesmos elementos.*

Conjuntos podem ser definidos listando todos os seus elementos. Por exemplo, $\{a,b,c,d\}$ é um conjunto cujos elementos são os quatro objetos a,b,c e d. Conjuntos também podem ser definidos por meio de propriedades:

$$X = \{x \in A \mid P(x)\}$$

representa o conjunto de todos os elementos do conjunto A que gozam da propriedade P. Por exemplo, se $P(x)$ = "$x > 0$" então $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ denota o conjunto dos números reais positivos. Devido à Definição 2.1, eventuais repetições devem ser ignoradas na caracterização de um conjunto pela lista de seus elementos. Por exemplo: $\{a,b,c,a\} = \{a,b,c\}$; $\{a,a\} = \{a\}$.

Pode acontecer de nenhum elemento de A gozar da propriedade P, de modo que $\{x \in A \mid P(x)\}$ não possui nenhum elemento. A fim de cobrir esses casos, é conveniente introduzir o **conjunto vazio**, que se denota por $\varnothing$. O conjunto vazio é caracterizado pela seguinte propriedade: qualquer que seja x, tem-se que $x \notin \varnothing$. Por exemplo, $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\} = \varnothing$.

Definição 2.2 *Dizemos que A é um* ***subconjunto*** *de B, e escrevemos $A \subset B$ ou $B \supset A$, se todo elemento de A é elemento de B. Se A não é um subconjunto de B escrevemos $A \not\subset B$.*

Se $A \subset B$ dizemos também que A está contido em B e que B contém A. Por exemplo, dados $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$ e $C = \{2,5,7\}$ então $A \subset B$ mas $A \not\subset C$. Os conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ satisfazem as seguintes relações de inclusão: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Para abreviar, escrevemos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. É importante distinguir x do conjunto $\{x\}$ cujo único elemento é x. Note que dizer que $x \in A$ é o mesmo que dizer que $\{x\} \subset A$.

Quando se escreve $A \subset B$ não está excluída a possibilidade de ser $A = B$. Se $A \subset B$ mas $A \neq B$ dizemos que A é um **subconjunto próprio** de B. Diversos autores preferem usar $A \subset B$ para indicar que A é subconjunto próprio de B, e $A \subseteq B$ quando a hipótese $A = B$ não está excluída (por analogia com os símbolos $<$ e $\leq$).

Exercício 2.1.1
Se X é um conjunto qualquer, prove que $\varnothing \subset X$.

Decorre imediatamente da Definição 2.1 que dois conjuntos A e B são iguais se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$. Portanto, para provar que $A = B$ devemos demonstrar primeiro que $A \subset B$ e, depois, que $B \subset A$. A forma padrão de provar que $A \subset B$ consiste em tomar um elemento arbitrário x de A e usar as definições de A e B para concluir que $x \in B$.

É possível que os elementos de um conjunto sejam eles próprios conjuntos. Neste caso, para evitar a repetição desagradável que está presente na expressão "conjunto de conjuntos", costuma-se falar em coleções ou famílias de conjuntos. Dado um conjunto X, denota-se por $\mathscr{P}(X)$ o conjunto composto por todos os subconjuntos de X, chamado de **conjunto das partes** (*power set*, em inglês) de X:

$$\mathscr{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}. \tag{2.1}$$

Em suma, $A \in \mathscr{P}(X)$ se e somente se $A \subset X$. O conjunto $\mathscr{P}(X)$ nunca é vazio porque, na pior das hipóteses, $\varnothing \in \mathscr{P}(X)$.

Exemplo 2.1.1
Se $X = \{a,b,c\}$ então

$$\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

Uniões e Interseções

Definição 2.3 *A* ***união*** *ou* ***reunião*** *de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \cup B$ formado pelos elementos que pertencem a A, a B ou a ambos. Em símbolos:*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

A ***interseção*** *de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \cap B$ formado pelos elementos que pertencem tanto a A quanto a B. Em símbolos:*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Dois conjuntos A e B são ditos **disjuntos** se $A \cap B = \varnothing$, isto é, se A e B não possuem nenhum elemento em comum.

O teorema a seguir mostra que a união e a interseção de conjuntos têm propriedades parecidas com as da soma e produto de números reais, e o conjunto vazio tem propriedades análogas às do número zero.

Teorema 2.4 *Se A, B, C, X e Y são conjuntos, temos:*

(i) $A \cap B \subset A$ *e* $A \cap B \subset B$. *Se* $X \subset A$ *e* $X \subset B$ *então* $X \subset A \cap B$.

(ii) $A \subset A \cup B$ *e* $B \subset A \cup B$. *Se* $A \subset Y$ *e* $B \subset Y$ *então* $A \cup B \subset Y$.

(iii) $A \cup B = B \cup A$ *e* $A \cap B = B \cap A$ *(Comutatividade).*

(iv) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *e* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(Associatividade).*

(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *e* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(Distributividade).*

(vi) $A \cup \varnothing = A$ *e* $A \cap \varnothing = \varnothing$ *(Leis de Identidade).*

(vii) $A \cup A = A$ *e* $A \cap A = A$ *(Leis de Idempotência).*

(viii) $A \cup (A \cap B) = A$ *e* $A \cap (A \cup B) = A$ *(Leis de Absorção).*

(ix) Se $A \subset B$ *então* $A \cup C \subset B \cup C$ *e* $A \cap C \subset B \cap C$.

(x) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$ *e* $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$.

Demonstração. Estas propriedades são fáceis de provar, desde que se tome o devido cuidado no manejo dos conectivos "e" e "ou". À guisa de exemplo, demonstraremos apenas a propriedade distributiva $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Se $x \in A \cap (B \cup C)$ então $x \in A$ e $x \in B \cup C$, que se desdobra em dois casos: $x \in A$ e $x \in B$ ou $x \in A$ e $x \in C$. No primeiro caso, $x \in A \cap B$ donde $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. No segundo caso, $x \in A \cap C$ donde $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Isto prova que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Para provar a inclusão oposta, suponha que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Então $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$. Na primeira hipótese, $x \in A$ e $x \in B$, donde $x \in B \cup C$ e se deduz que $x \in A \cap (B \cup C)$. Na segunda hipótese, $x \in A$ e $x \in C$, donde $x \in B \cup C$ e se conclui que $x \in A \cap (B \cup C)$. Portanto, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ e a demonstração está completa. ∎

Definição 2.5 *Se A e B são conjuntos, a* ***diferença*** *entre A e B é o conjunto*

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}. \tag{2.2}$$

Outras notações para $A \setminus B$ *são* $A - B$ *e* $A \sim B$.

Exemplo 2.1.2
Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,4\}$ então $A \setminus B = \{1,3\}$.

Definição 2.6 *A* ***diferença simétrica*** *dos conjuntos A e B é o conjunto denotado por* $A \Delta B$ *e definido por*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \tag{2.3}$$

Quando $B \subset A$, a diferença $A \setminus B$ é chamada de **complemento** ou **complementar** de B em relação a A, e costuma ser denotada por $\complement_A B$.

Acontece com frequência de, numa certa discussão, todos os conjuntos de interesse serem subconjuntos de um certo conjunto U, e dizemos que estamos trabalhando no **universo** U.

Definição 2.7 *Se estamos trabalhando no universo U e $A \subset U$, o conjunto*

$$A^c = U \setminus A$$

*é chamado simplesmente de **complemento** ou **complementar** de A (o universo U fica subentendido). Outras notações usadas para o complemento são $\complement A$ e A'.*

Exemplo 2.1.3

Se U é o conjunto dos números reais e A é o conjunto dos números racionais, A^c é o conjunto dos números irracionais.

Exercício 2.1.2

Se A e B são ambos subconjuntos de um mesmo conjunto U, prove que $A \setminus B = A \cap B^c$.

Teorema 2.8 *Se A e B são subconjuntos de um conjunto U, em relação ao qual são tomados os complementos, temos:*

$$\text{(C1) } (A^c)^c = A;$$

$$\text{(C2) } A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c;$$

$$\text{(C3) } A = \varnothing \Leftrightarrow A^c = U;$$

$$\text{(C4) } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c;$$

$$\text{(C5) } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Demonstração. As propriedades (C1) e (C3) são óbvias; (C4) e (C5) são conhecidas como *leis de De Morgan*. Provaremos apenas (C2) e (C4), o restante fica como exercício.

(C2) Se $B^c \not\subset A^c$ então existe $x \in B^c$ tal que $x \notin A^c$, isto é, $x \notin B$ e $x \in A$. Mas isto significa que $A \not\subset B$. Reciprocamente, se $A \not\subset B$ então existe $x \in A$ tal

que $x \notin B$, isto é, $x \notin A^c$ e $x \in B^c$. Isto nos diz que $B^c \not\subset A^c$, o que completa a demonstração.

(C4) Se $x \in (A \cup B)^c$ então $x \notin A \cup B$, isto é, $x \notin A$ e $x \notin B$. Neste caso, $x \in A^c$ e $x \in B^c$, de modo que $x \in A^c \cap B^c$. Isto mostra que $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$. Agora, se $x \in A^c \cap B^c$ então $x \in A^c$ e $x \in B^c$, ou seja, $x \notin A$ e $x \notin B$. Logo, $x \notin A \cup B$ ou, equivalentemente, $x \in (A \cup B)^c$. Portanto, $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$ e a prova está concluída. ∎

As definições de união e interseção podem ser estendidas a coleções arbitrárias de conjuntos. Seja Λ um conjunto de índices de tal modo que para cada $\lambda \in \Lambda$ é dado um conjunto A_λ. Costuma-se denotar a família de conjuntos A_λ por $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Definição 2.9 *A união e a interseção da família de conjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ são os conjuntos definidos por*

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid x \in A_\lambda \textit{ para algum } \lambda \in \Lambda\},$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid x \in A_\lambda \textit{ para todo } \lambda \in \Lambda\}.$$

Exemplo 2.1.4
Suponha que $n \in \mathbb{N}$ e $A_n = \{-2n, -2n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, 2n-1, 2n\}$. Neste caso, é fácil comprovar que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Z}, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Exercício 2.1.3
Prove que as leis de De Morgan permanecem válidas para uniões e interseções arbitrárias:

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c, \quad \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c.$$

2.2 *Produto Cartesiano, Relações e Funções*

Um conjunto não é alterado se a ordem dos seus elementos é modificada. Em particular, o conjunto $\{a,b\}$ com apenas dois elementos constitui um par desordenado, pois $\{a,b\} = \{b,a\} = \{a\} \cup \{b\}$. O **par ordenado** (a,b) é definido pela seguinte propriedade: $(a,b) = (c,d)$ se e somente se $a = c$ e $b = d$. Note que se $a \neq b$ resulta que $(a,b) \neq (b,a)$ mas $\{a,b\} = \{b,a\}$. A noção de par ordenado pode ser tomada como primitiva, mas é possível defini-la em termos de conjuntos da seguinte maneira: $(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{a\},\{a,b\}\}$.

Exercício 2.2.1
Prove que $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ se e somente se $a = c$ e $b = d$.

Uma **n-upla ordenada** $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ pode ser definida recursivamente da seguinte maneira:

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n) = (a_1,(a_2,a_3,\ldots,a_n)).$$

Definição 2.10 *O **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a,b) em que $a \in A$ e $b \in B$:*

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Analogamente, o produto cartesiano de n conjuntos é definido por

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Se todos os n conjuntos são iguais, isto é, $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, seu produto cartesiano é denotado simplesmente por A^n.

Relações

Dizemos que há uma relação entre duas coisas se elas estão conectadas de alguma maneira. Entre pessoas pode haver a relação "x é irmão de y" ou, entre números, a relação "$x < y$". Palavras ou símbolos são escritos entre os objetos para indicar que eles estão relacionados. No caso de uma relação genérica

escreve-se xRy. Se conhecemos a relação R, podemos considerar todos os pares ordenados (a,b) de objetos relacionados:

$$\{(a,b) \mid aRb\}.$$

Este conjunto é chamado de **gráfico** da relação R, e serve para motivar a definição de uma relação como sendo o seu gráfico.

Definição 2.11 *Sejam A e B conjuntos. Uma* ***relação de** A **para** B é um subconjunto de $A \times B$. Uma relação de A para A, isto é, um subconjunto de $A \times A$, é dita uma relação* ***em*** *A.*

Exemplo 2.2.1
Sejam $A = B = \mathbb{R}$ e xRy se e somente se $x^2 + y^2 \leq 1$. A relação assim definida é o conjunto

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Então os números reais x e y estão relacionados através de R se o ponto do plano com coordenadas cartesianas (x,y) pertence ao disco unitário, que é o gráfico da relação R.

Relações de Equivalência
São comuns situações em que certos objetos não são iguais mas podem ser considerados equivalentes segundo algum critério de interesse. Para permitir expressar a noção intuitiva de equivalência, introduz-se um tipo muito especial de relação, chamada de relação de equivalência.

Definição 2.12 *Uma relação R no conjunto A é chamada de* ***relação de equivalência*** *se e somente se é* ***reflexiva, simétrica*** *e* ***transitiva:***
(E1) $(\forall a \in A)\ aRa$;
(E2) $(\forall a,b \in A)$ *se* aRb *então* bRa;
(E3) $(\forall a,b,c \in A)$ *se* aRb *e* bRc *então* aRc.

A noção de relação de equivalência é uma generalização da noção de igualdade. Costuma-se usar o símbolo $\sim$ para denotar uma relação de equivalência, e escrevemos $x \sim y$ para indicar que os objetos x e y são equivalentes.

Exemplo 2.2.2
Seja M a relação em $\mathbb{R}$ definida por xMy se e somente se $x - y \in \mathbb{Z}$. (i) Esta relação é reflexiva: $x - x = 0$ e $0 \in \mathbb{Z}$. (ii) É simétrica: se xMy então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = m$, donde $y - x = -m$, de modo que yMx porque $-m \in \mathbb{Z}$. (iii) É transitiva: se xMy e yMz então existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $x - y = m$ e $y - z = n$, donde $x - z = (x - y) + (y - z) = m + n$ e $m + n \in \mathbb{Z}$. Logo, M é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.3
A Lei Zero da Termodinâmica afirma que o equilíbrio térmico é uma relação de equivalência: por definição, um sistema termodinâmico A está em equilíbrio térmico consigo mesmo; se A está em equilíbrio térmico com B, então B está em equilíbrio térmico com A; se dois sistemas termodinâmicos estão em equilíbrio térmico com um terceiro, estão em equilíbrio térmico entre si.

Definição 2.13 *Se R é uma relação de equivalência em A, o conjunto de todos os elementos de A que são equivalentes a um elemento a é chamado de* ***classe de equivalência*** *de a, denotada por $[a]_R$:*

$$[a]_R = \{b \in A \mid aRb\}.$$

Se num dado contexto a relação de equivalência está subentendida, a classe de equivalência de a é denotada simplesmente por $[a]$.

Exemplo 2.2.4
No caso da relação de equivalência do Exemplo 2.2.2, a classe de equivalência de $1/2$ é formada pelos números reais da forma $1/2 + m = (2m+1)/2$ com $m \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, a classe de equivalência de 2 é $\mathbb{Z}$, a totalidade dos números inteiros. Estas duas classes de equivalência são não apenas distintas, mas também disjuntas.

Note que $a \in [a]$ por causa da propriedade reflexiva, de modo que as classes de equivalência cobrem todo o conjunto A: cada $a \in A$ pertence a pelo menos

uma classe de equivalência. Na verdade, um dado elemento de A pertence somente a uma classe de equivalência porque duas classes de equivalência em A ou são idênticas ou são disjuntas. De fato, se $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ existe um elemento $c \in [a] \cap [b]$. Segue-se que aRc e bRc, donde, por simetria e transitividade, aRb. Portanto, se $d \in [a]$ temos dRa e, como aRb, resulta dRb, isto é, $d \in [b]$. Isto mostra que $[a] \subset [b]$. Da mesma forma, mostra-se que $[b] \subset [a]$, donde se conclui que $[a] = [b]$. Diz-se que uma relação de equivalência **particiona** um conjunto em classes de equivalência disjuntas.

Um exemplo simples poder ser útil para dar um caráter mais intuitivo à noção de classe de equivalência: uma nota de R$ 20,00 pode ser interpretada como a classe de equivalência de todas as coisas que custam exatamente vinte reais.

FUNÇÕES

Uma **função** é uma regra que faz corresponder a cada elemento de um conjunto um único elemento de outro conjunto. Se X e Y são conjuntos, para indicar que f é uma função de X em Y escrevemos $f : X \to Y$, e denotamos por $f(x) \in Y$ o elemento correspondente ao elemento $x \in X$. A notação $x \longmapsto f(x)$ é usada para indicar que f faz corresponder a x o valor $f(x)$. Funções também são chamadas de **aplicações** ou **mapeamentos**.

Em vez de tomar a ideia de função como um conceito primitivo, na matemática moderna define-se função em termos de conjuntos. Uma função de X em Y é uma relação com uma propriedade especial: para cada $x \in X$ existe apenas um $y \in Y$ que está relacionado com x.

Definição 2.14 *Dados dois conjuntos X e Y, uma **função** f de X em Y é um subconjunto de $X \times Y$ tal que*

$$(\forall x \in X)(\forall y,z \in Y)\big((x,y) \in f \text{ e } (x,z) \in f\big) \Rightarrow (y = z).$$

De acordo com esta definição, uma função é um conjunto, a saber, o seu gráfico. No entanto, a notação mais comum, que usaremos, é $y = f(x)$ em vez de $(x,y) \in f$. O conjunto X, no qual f está definida, é o seu **domínio**; o conjunto Y, no qual f toma valores, é o seu **contradomínio**. Não basta especificar a regra de correspondência para definir uma função, é também necessário especificar o domínio e o contradomínio. Duas funções são iguais

se as regras de correspondência são as mesmas e se os respectivos domínios e contradomínios coincidem. Deve-se evitar confundir f com $f(x)$: f é a função, ao passo que $f(x)$ é o valor da função no ponto x do seu domínio.

Exemplo 2.2.5
Sejam X o conjunto de todos os países, Y o conjunto de todas as cidades e f a regra que associa a cada país a sua capital. Como cada país oficialmente só possui uma capital, f é efetivamente uma função. Agora, se g faz corresponder a cada país a sua cidade com mais de um milhão de habitantes, g não é uma função porque certamente há países com várias cidades com mais de um milhão de habitantes: a regra é ambígua, não permite associar a cada país uma única cidade.

Definição 2.15 *Uma função $f : X \to Y$ é dita **injetiva** se e somente se $f(x) = f(x')$ implica $x = x'$ para todos os $x,x' \in X$.*

Em outras palavras, uma função é injetiva se $f(x) \neq f(x')$ sempre que $x \neq x'$, isto é, se pontos distintos do domínio são mapeados em pontos distintos do contradomínio.

Exemplo 2.2.6
A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$ é injetiva, pois de $2x = 2x'$ deduz-se $x = x'$.

Definição 2.16 *Uma função $f : X \to Y$ é dita **sobrejetiva** ou **sobre** (*onto, *em inglês) Y se e somente se para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Exemplo 2.2.7
(i) As projeções $\pi_1 : X \times Y \to X$ e $\pi_2 : X \times Y \to Y$ definidas por $\pi_1(a,b) = a$ e $\pi_2(a,b) = b$ são claramente sobrejetivas. (ii) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 1$ é injetiva, pois $3x + 1 = 3x' + 1$ implica $x = x'$, e também é sobrejetiva: dado $y \in \mathbb{R}$ basta escolher $x = (y-1)/3$ para se ter $f(x) = y$. (iii) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$ não é injetiva

nem sobrejetiva: $g(-1) = g(1)$ mas $-1 \neq 1$; se $y = -4$ não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = g(x)$. (iv) Já a função $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $h(x) = 3x + 1$ não é sobrejetiva; por exemplo, não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $h(x) = 2$.

Definição 2.17 *Uma função é* ***bijetiva*** *(uma* ***bijeção*** *ou* ***correspondência biunívoca****) se e somente se é injetiva e sobrejetiva.*

Das funções discutidas no Exemplo 2.2.7, apenas f é bijetiva. Note que h não é bijetiva apesar de caracterizar-se pela mesma a regra de correspondência que f: as funções f e h são distintas porque os respectivos domínios e contradomínios não coincidem.

Definição 2.18 *Dados $f : X \to Y$ e $A \subset X$, a* ***imagem*** *de A pela função f é o conjunto $f(A) \subset Y$ formado pelos valores $f(x)$ que f assume nos pontos $x \in A$:*

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in A\}.$$

Note que f é sobrejetiva se e somente se $f(X) = Y$. Se f não é sobrejetiva, $f(X)$ é um subconjunto próprio de Y. O conjunto $f(X)$ — a imagem do domínio de f — é chamado de **imagem** de f ou **alcance** (*range*, em inglês) de f.

Exemplo 2.2.8
Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é definida por $f(n) = 2n + 1$, a imagem de f é o conjunto dos números ímpares.

Teorema 2.19 *Dada uma função $f : X \to Y$, se A e B são quaisquer subconjuntos de X tem-se:*

(Imag1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(Imag2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;

(Imag3) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$;

(Imag4) $f(\varnothing) = \varnothing$.

Demonstração. As demonstrações de (Imag3) e (Imag4) serão deixadas como exercícios.

(Imag1) Se $y \in f(A \cup B)$ então $y = f(x)$ para algum $x \in A \cup B$. Como $x \in A$ ou $x \in B$, resulta que $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$, de modo que $y \in f(A) \cup f(B)$. Isto mostra que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Reciprocamente, se $y \in f(A) \cup f(B)$ então $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. No primeiro caso, $y = f(x)$ para algum x pertencente a A, logo pertencente a $A \cup B$. Segue-se que $y \in f(A \cup B)$. No segundo caso, o mesmo argumento, com B no papel de A e vice-versa, mostra que $y \in f(A \cup B)$. Portanto, $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ e a demonstração está concluída.

(Imag2) Se $y \in f(A \cap B)$ existe $x \in A \cap B$ tal que $y = f(x)$. Como $x \in A$ e $x \in B$, segue-se que $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$, donde $y \in f(A) \cap f(B)$. ∎

Exemplo 2.2.9
Pode não ocorrer a igualdade em (Imag2), bastando para isto que f não seja injetiva. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$ e os conjuntos $A = \{-2\}$ e $B = \{2\}$. Então $g(A) = g(B) = \{4\}$, de modo que $\{4\} = g(A) \cap g(B) \neq g(A \cap B) = g(\varnothing) = \varnothing$.

Teorema 2.20 *Dada uma função $f : X \to Y$, a igualdade $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ se verifica para quaisquer $A, B \subset X$ se e somente se f é injetiva.*

Demonstração. Suficiência ($\Leftarrow$). Seja f injetiva e tome $y \in f(A) \cap f(B)$. Como $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$, existem $x \in A$ e $x' \in B$ tais que $y = f(x) = f(x')$. Logo, $x = x'$ e, em consequência, $x \in A \cap B$. Portanto, $y = f(x) \in f(A \cap B)$, o que estabelece a inclusão $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Como a inclusão oposta é sempre verdadeira, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Necessidade ($\Rightarrow$). Se f não é injetiva, escolhamos, como no Exemplo 2.2.9, dois elementos distintos x e x' tais que $f(x) = f(x') = y$ e tomemos os conjuntos $A = \{x\}$ e $B = \{x'\}$, de modo que $f(A) \cap f(B) = \{y\}$ e $f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing$. Segue-se que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ e a demonstração está completa. ∎

Definição 2.21 *Dada uma função $f : X \to Y$, seja um conjunto $B \subset Y$. A **imagem inversa** de B por f é o conjunto $f^{-1}(B) \subset X$ constituído pelos pontos $x \in X$ tais que $f(x) \in B$:*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Exemplo 2.2.10
Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 + y^2$. Então o conjunto

$$f^{-1}(\{1\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

é a circunferência de raio unitário com centro na origem. No caso do conjunto $\{y\}$ com apenas um elemento $y \in Y$, por simplicidade notacional costuma-se escrever $f^{-1}(y)$ em lugar de $f^{-1}(\{y\})$.

Cuidado, o símbolo $f^{-1}(B)$ **não** deve ser interpretado como a imagem de B pela função inversa f^{-1}, a ser definida mais adiante, e que nem sempre existe. O símbolo $f^{-1}(B)$ é uma coisa só, não pode ser desmembrado, e denota a imagem inversa de B por f, um conjunto bem definido mesmo quando f^{-1} não existe. A imagem inversa é mais bem comportada do que a imagem no que diz respeito a operações com conjuntos.

Teorema 2.22 *Dada uma função $f: X \to Y$, se A e B são quaisquer subconjuntos de X tem-se:*

(Inv1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

(Inv2) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

(Inv3) $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$;

(Inv4) $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$;

(Inv5) $f^{-1}(Y) = X$;

(Inv6) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Demonstração. Provaremos apenas a segunda e a terceira propriedades.
(Inv2) Se $x \in f^{-1}(A \cap B)$ então $f(x) \in A \cap B \Rightarrow f(x) \in A$ e $f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$ e $x \in f^{-1}(B)$. Portanto, $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ e conclui-se que $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Reciprocamente, $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$ e $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in A$ e $f(x) \in B \Rightarrow f(x) \in A \cap B \Rightarrow x \in f^{-1}(A \cap B)$ e vale a inclusão oposta $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$.
(Inv3) Temos $x \in f^{-1}(A^c) \Leftrightarrow f(x) \in A^c \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in \left(f^{-1}(A)\right)^c$. ∎

COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Dadas duas funções $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$, tais que o domínio da segunda

coincide com o contradomínio da primeira, é possível e útil construir uma **função composta** $g \circ f : X \to Z$ que corresponde a aplicar primeiro f e depois g:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X.$$

Na verdade, para que a função composta $g \circ f$ esteja bem definida basta que o domínio de g contenha o contradomínio de f.

Exemplo 2.2.11
Seja $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ o conjunto dos números reais não negativos. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x^2 + 1$ e $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é definida por $f(x) = \sqrt{x}$, a função composta $g \circ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é tal que $g \circ f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Verifica-se facilmente que a composição de funções é associativa: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Uma aplicação bijetiva de X em X é dita uma **transformação** em X. Uma transformação trivial mas importante é a aplicação identidade id_X definida por

$$id_X(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

A aplicação identidade funciona como elemento neutro em relação à composição de transformações:

$$f \circ id_X = id_X \circ f = f.$$

Definição 2.23 *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ duas funções.*

*(i) A função g é uma **inversa à esquerda** de f se e somente se $g \circ f = id_X$.*

*(ii) A função g é uma **inversa à direita** de f se e somente se $f \circ g = id_Y$.*

*(iii) A função g é uma **inversa** de f se e somente é uma inversa tanto à esquerda quanto à direita, isto é, $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$.*

De modo geral, as inversas à esquerda e à direita não são únicas.

Exemplo 2.2.12
(i) A função $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f_1(x) = x^2$ não é injetiva. As funções $h_\pm : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidas por $h_\pm(x) = \pm\sqrt{x}$ são duas inversas à direita distintas de f_1: $f_1 \circ h_\pm = id_{\mathbb{R}^+}$. De fato,

$$f_1 \circ h_\pm (x) = f_1(h_\pm(x)) = (\pm\sqrt{x})^2 = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ .$$

Estas não são as duas únicas inversas à direita de f. Você está convidado a inventar outras. (ii) Por sua vez, a função $f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f_2(x) = \sqrt{x}$ não é sobrejetiva. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $g(x) = x^2$ se $x \geq 0$ e $g(x) = 0$ se $x < 0$ é uma inversa à esquerda de f_2 porque, como $f_2(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$g \circ f_2 (x) = g(f_2 (x)) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ .$$

Note que para $x < 0$ poderíamos ter escolhido $g(x) = \cos x$ ou adotado qualquer outra definição para $g(x)$ sem afetar a equação $g \circ f_2 = id_{\mathbb{R}^+}$. Há, portanto, uma infinidade de inversas à esquerda de f_2.

Teorema 2.24 *Sejam X e Y conjuntos não vazios, e seja $f : X \to Y$ uma função,*

(i) A função f tem uma inversa à direita se e somente se é sobrejetiva.

(ii) A função f tem uma inversa à esquerda se e somente se é injetiva.

(iii) A função f tem uma inversa, denotada por f^{-1}, se e somente se é bijetiva. Além disso, a inversa é única.

Demonstração. (i) Se $g : Y \to X$ é uma inversa à direita de f então $f \circ g = id_Y$, de modo que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Logo, f é sobrejetiva porque cada $y \in Y$ é a imagem de $g(y) \in X$. Reciprocamente, se f é sobrejetiva então para cada $y \in Y$ há pelo menos um x tal que $f(x) = y$. Na verdade, y pode ser a imagem de muitos elementos distintos de X. Não importa, defina $g : Y \to X$ associando a cada $y \in Y$ um $x \in X$ arbitrariamente escolhido tal que $f(x) = y$, de modo que $g(y) = x$. Temos, então, $f \circ g\,(y) = f(g(y)) = f(x) = y$ e f possui uma inversa à direita. (ii) A demonstração é análoga e fica como um exercício. (iii) Existência: pelos itens (i) e (ii), f possui uma inversa à esquerda e à direita se e somente se é injetiva e sobrejetiva, ou seja, se e somente se é bijetiva. As inversa à esquerda e à direita são necessariamente iguais: se $g_e \circ f = id_X$ e $f \circ g_d = id_Y$, então $g_e = g_e \circ id_Y = g_e \circ (f \circ g_d) = (g_e \circ f) \circ g_d = id_X \circ g_d = g_d$. Unicidade: suponha que g e h sejam duas inversas de f, de modo que $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$, $h \circ f = id_X$, $f \circ h = id_Y$. Neste caso, $h = h \circ id_Y = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = id_X \circ g = g$. ∎

Definição 2.25 *Dada a função $f : X \to Y$ e um subconjunto A de X, a* ***restrição*** *de f a A é a função $f|_A : A \to Y$ definida por*

$$f|_A(x) = f(x), \ \forall x \in A.$$

Diz-se, também, que f é uma ***extensão*** *de $f|_A$.*

A restrição da aplicação identidade

$$i_A = id_X|_A : A \to X$$

é chamada de **aplicação inclusão** para o conjunto $A \subset X$. A restrição de f a A é a composição de f com a aplicação inclusão para A:

$$f|_A = f \circ i_A.$$

2.3 *Conjuntos Infinitos e Números Transfinitos*

A contagem do número de elementos de um conjunto finito A consiste no estabelecimento de uma relação biunívoca entre os elementos de A e o conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ dos n primeiros números naturais. Dado $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{N}_n$ o conjunto dos números naturais desde 1 até n:

$$\mathcal{N}_n = \{1,2,\ldots,n\} = \{k \in \mathbb{N} \,|\, 1 \le k \le n\}.$$

Definição 2.26 *Um conjunto A é* ***finito*** *se é vazio ou se, para algum $n \in \mathbb{N}$, existe uma bijeção $f : A \to \mathcal{N}_n$. No primeiro caso, diz-se que A tem zero elementos. No segundo caso, diz-se que A tem n elementos ou que seu* ***número cardinal*** *é n e escreve-se $\text{Card}(A) = n$. O número cardinal do conjunto vazio é zero: $\text{Card}(\varnothing) = 0$.*

Diz-se que um conjunto é **infinito** quando não é finito. Conjuntos infinitos apresentam propriedades marcadamente distintas de conjuntos finitos. Se A e B são conjuntos finitos com o mesmo número de elementos, então, por definição, existem bijeções $f : A \to \mathcal{N}_n$ e $g : B \to \mathcal{N}_n$. Portanto, $g^{-1} \circ f : A \to B$ é uma bijeção de A sobre B. É intuitivamente claro, e pode ser provado rigorosamente (Birkhoff & MacLane 1977; Lima 2004), que existe uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos finitos se e somente se eles têm o mesmo número de elementos. Isto implica que não é possível estabelecer correspondência biunívoca entre um conjunto finito e qualquer um de seus subconjuntos próprios.

Em 1638, Galileu notou o "paradoxo" de que os quadrados dos números naturais podem ser postos em correspondência biunívoca com os números naturais, em contradição com o axioma de Euclides de que "o todo é maior do que a parte". Outros antes de Galileu já haviam observado que um conjunto infinito pode ser posto em correspondência biunívoca com um de seus subconjuntos próprios. A organização de uma lista dos membros de um conjunto infinito em correspondência bijetiva com os números naturais constitui uma **enumeração** do conjunto. Os quadrados dos números naturais e os números inteiros podem ser enumerados:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 36, & 49, & 64, & 81, & 100, & 121 & \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & 4, & -4, & 5, & -5, & \ldots
\end{array}
$$

Definição 2.27 *Um conjunto A é* ***enumerável*** *se é finito ou se existe uma bijeção* $f : \mathbb{N} \to A$. *No segundo caso, o conjunto é dito* ***infinito enumerável*** *e a lista* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ *onde* $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2), \ldots, a_n = f(n), \ldots$ *constitui uma* ***enumeração*** *de A. Cada bijeção* $f : \mathbb{N} \to A$ *define uma enumeração de A.*

Teorema 2.28 *Todo subconjunto de um conjunto infinito enumerável é finito ou infinito enumerável.*

Demonstração. Seja A um conjunto enumerável e seja $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ uma enumeração de A. Se A' é um subconjunto finito de A, não há nada a demonstrar. Se A' é um subconjunto infinito de A, seja a'_1 o primeiro elemento da sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ que pertence a A'; seja a'_2 o segundo elemento da sequência que pertence a A', e assim por diante. A aplicação $f' : \mathbb{N} \to A$ definida por

$$f'(1) = a'_1,\ f'(2) = a'_2,\ \ldots$$

é uma bijeção. ∎

Teorema 2.29 (Paradoxo de Galileu) *Todo conjunto infinito enumerável admite uma bijeção sobre um de seus subconjuntos próprios.*

Demonstração. Se $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ é uma enumeração do conjunto infinito

enumerável A, a correspondência $a_1 \leftrightarrow a_2, a_2 \leftrightarrow a_3, \ldots, a_n \leftrightarrow a_{n+1}, \ldots$ é uma bijeção de A sobre seu subconjunto próprio obtido pela exclusão do elemento a_1. ∎

Esta última é a propriedade fundamental que caracteriza os conjuntos infinitos: um conjunto é infinito se e somente se pode ser posto em correspondência biunívoca com um de seus subconjuntos próprios.

Teorema 2.30 *Todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável.*

Demonstração. Seja A um conjunto infinito. Escolha um elemento a_1 de A. No conjunto que sobra $A \setminus \{a_1\}$, que é infinito, escolha um elemento a_2. Em $A \setminus \{a_1, a_2\}$, escolha um elemento a_3. Este processo prossegue indefinidamente já que $A \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ nunca é vazio porque A é infinito. Como todos os seus elementos são distintos, o conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ é um subconjunto infinito enumerável de A. ∎

Esta demonstração faz uso de um princípio básico da teoria dos conjuntos conhecido como *axioma da escolha*, que afirma o seguinte: dado qualquer conjunto não vazio A, se B é um de seus subconjuntos não vazios existe uma "função de escolha" f que escolhe um elemento $f(B) \in B$. Dada nossa experiência com conjuntos finitos, este axioma parece bastante inofensivo, além de óbvio ululante. Há, no entanto, matemáticos que não o aceitam quando aplicado a conjuntos infinitos arbitrários, pois consideram que, na ausência de uma definição construtiva de uma função de escolha, não se deve admitir sua existência. A grande maioria dos matemáticos não faz objeções ao axioma da escolha, mas, em deferência aos matemáticos que o veem com reservas, é costume mencionar o seu uso numa demonstração. A menção também serve para deixar claro que a parte da prova em que o axioma da escolha foi usado tem um caráter não construtivo. A propósito, ele foi empregado sem menção explícita na demonstração do Teorema 2.24 (confira). Na Seção 2.5 discutiremos mais detalhadamente a natureza do axioma da escolha e algumas de suas consequências.

Um exemplo um tanto surpreendente de conjunto enumerável é o conjunto dos números racionais. A enumerabilidade dos números inteiros é compreensível, pois são pontos isolados quando marcados numa linha reta. Os números racionais, no entanto, parecem estar continuamente distribuídos: entre

dois números racionais, por mais próximos que sejam, existe um outro número racional. Apesar disto, podemos arrumar todas as frações numa matriz infinita da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\frac{0}{1} & & \frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{-1}{1} & & \frac{2}{1} & \rightarrow & \frac{-2}{1} & & \frac{3}{1} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\frac{0}{2} & & \frac{1}{2} & & \frac{-1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{-2}{2} & & \frac{3}{2} & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
\frac{0}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{-1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{-2}{3} & & \frac{3}{3} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & \\
\frac{0}{4} & & \frac{1}{4} & & \frac{-1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{-2}{4} & & \frac{3}{4} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \cdots
\end{array}
$$

Seguindo as setas, podemos enumerar todas a frações. Riscando da lista as frações que representam o mesmo número racional, obtemos uma correspondência biunívoca entre os números racionais e os números naturais.

Este mesmo argumento permite provar que o produto cartesiano de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Teorema 2.31 *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração. Sejam A e B conjuntos enumeráveis, com as respectivas enumerações $a_1, a_2, \ldots$ e $b_1, b_2, \ldots$. Organize todos os pares ordenados (a_i, b_j) numa matriz infinita, como acima. Seguindo as setas associa-se biunivocamente a cada número natural um elemento de $A \times B$. ∎

Mesmo quando reunimos uma coleção infinita enumerável de conjuntos enumeráveis, o resultado continua sendo um conjunto enumerável.

Teorema 2.32 *A união de uma coleção enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração. Seja $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ uma coleção de conjuntos enumeráveis. Seja $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots$ uma enumeração de A_i. Arranjando os elementos a_{ij} numa matriz infinita como acima e seguindo as setas, resulta uma bijeção dos números naturais sobre $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$. ∎

Estes resultados parecem sugerir que todos os conjuntos infinitos são enumeráveis, o que parece referendar nossa intuição que nos diz não fazer sentido

pensar num infinito "maior" do que outro. Georg Cantor foi autor de grandes descobertas, publicadas a partir de 1874, a respeito da comparação de conjuntos infinitos (Cantor 1915). Para surpresa geral, e escândalo de alguns, ele mostrou que nem todos os infinitos são do mesmo "tamanho", há infinitos "maiores" do que outros.

Teorema 2.33 (Cantor) *O conjunto dos números reais não é enumerável.*

Demonstração. Suponha que exista uma enumeração $x_1, x_2, x_3, \ldots$ dos números reais compreendidos entre 0 e 1. Listemos todos esses números expressos em notação decimal:

$$x_1 = 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \cdots$$
$$x_2 = 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \cdots$$
$$x_3 = 0, a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \cdots$$
$$x_4 = 0, a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, a_{44} \cdots$$
$$\vdots$$

Depois da vírgula, a parte decimal dos números reais está organizada numa matriz infinita. Cada a_{ij} é um dos algarismos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Há ambiguidades na representação decimal, como por exemplo $0{,}50000\cdots = 0{,}49999999\cdots$. Para evitar esta duplicidade, suponhamos que a representação que termina com uma infinidade de noves nunca é usada para os x_i. Vamos, agora, construir um número real a entre 0 e 1 por meio do "método diagonal" ou "processo diagonal" de Cantor. Os dígitos da expansão decimal $0, a_1 a_2 a_3 \cdots$ do número a são escolhidos da seguinte maneira: se o primeiro dígito depois da vírgula de x_1 for 5 então $a_1 = 6$, e se for diferente de 5 então $a_1 = 5$; se o segundo dígito depois da vírgula de x_2 for 5 então $a_2 = 6$, e se for diferente de 5 então $a_2 = 5$; se o terceiro dígito depois da vírgula de x_3 for 5 então $a_3 = 6$, e se for diferente de 5 então $a_3 = 5$. Continuando indefinidamente, resulta um número que difere de x_1 no primeiro dígito, difere de x_2 no segundo dígito, difere de x_3 no terceiro dígito, e assim por diante. Logo, o número a não está na lista já que difere de todos os números da lista, o que contradiz a hipótese de que a enumeração incluía *todos* os números reais. Se $\mathbb{R}$ fosse enumerável, o seu subconjunto formado pelos números reais entre 0 e 1 teria que ser enumerável pelo Teorema 2.28. Portanto, o conjunto dos números reais não é enumerável. ∎

Corolário 2.34 *O conjunto dos números irracionais não é enumerável.*

Os números reais classificam-se em algébricos ou transcendentes. Um número real é **algébrico** se satisfaz uma equação polinomial de grau positivo com coeficientes inteiros:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \; a_n \neq 0, \; a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Todo número racional é algébrico, pois se $x = p/q$ com p e q inteiros, então x obedece à equação $qx - p = 0$. Irracionais algébricos obedecem a equações algébricas de grau mais elevado. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é algébrico porque satisfaz $x^2 - 2 = 0$. Da mesma forma, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é algébrico porque satisfaz $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

Um número real que não é algébrico é dito **transcendente**. Foi somente em 1851 que Liouville, por construção explícita, provou a existência de uma coleção de números transcendentes (Dunham 2005; Eves 1990a). Em particular, ele deu o exemplo de um número transcendente, o hoje chamado número de Liouville

$$0{,}110001000000000000000001000 0\cdots$$

em que há um dígito 1 na posição $n!$ e 0 nas demais posições, na representação decimal. Em 1873, Hermite provou a transcendência de e, a base dos logaritmos naturais.[1] A prova da transcendência de π, por Lindemann, só apareceria em 1882.[2] Parecia que os números transcendentes eram raros. Em mais uma descoberta notável e surpreendente, Cantor provou, em 1874, que o conjunto dos números transcendentes não é enumerável, ou seja, de todos os tipos de números reais os números transcendentes são os mais abundantes.

Teorema 2.35 (Cantor) *O conjunto dos números algébricos é enumerável.*

Demonstração. Dado um polinômio de grau positivo com coeficientes inteiros

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \; a_n > 0,$$

1. Spivak (1994) apresenta a prova de Hermite, numa versão simplificada por Hilbert.

2. Em Figueiredo (2011) há uma prova da transcendência de π.

sua *altura* ou *índice* é o número natural

$$h = |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_0| + n - 1.$$

O número de polinômios com uma dada altura é finito. Por exemplo, o único polinômio com $h = 1$ é x; os quatro polinômios com $h = 2$ são $x+1, x-1, 2x, x^2$. Como um polinômio de grau n tem no máximo n raízes reais, para cada h há um número finito de números algébricos. Numerando consecutivamente os números algébricos com $h = 1$, os números algébricos com $h = 2$, os números algébricos com $h = 3$ e assim sucessivamente, resulta uma enumeração da totalidade dos números algébricos. ∎

Corolário 2.36 *O conjunto dos números transcendentes não é enumerável.*

Provas Existenciais

A demonstração do Teorema 2.35, do qual se deduz que números transcendentes não apenas existem como também são os mais abundantes de todos os números reais, não exibe explicitamente nem fornece nenhum método de construir um só número transcendente. Trata-se de um exemplo típico de **prova existencial**, em que se demonstra a existência de alguma coisa sem mostrar como construí-la. Uma **prova construtiva** estabelece a existência de algo mostrando explicitamente como construí-lo. Os matemáticos da escola intuicionista não aceitam provas existenciais, especialmente aquelas que demonstram a existência de algum objeto matemático supondo a sua inexistência e disto deduzindo uma contradição. As ideias fundamentais do intuicionismo são expostas com muita clareza em Eves (1990b) e, com maior profundidade, em Kleene (1967, §36).

Embora apareçam raramente, há provas que nem são completamente construtivas nem completamente existenciais, pois consistem na construção explícita de alguns objetos acompanhada de uma prova de que um dos objetos possui a propriedade desejada, embora não se saiba qual deles, como no fascinante exemplo a seguir (Jones & Toporowski 1973).

Teorema 2.37 *Existem números irracionais a e b tais que a^b é racional.*

Demonstração. Seja $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Se x é racional a existência fica estabelecida com $a = \sqrt{2}$ e $b = \sqrt{2}$. Se x é irracional, como $x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$, a existência fica estabelecida com $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$. ∎

Aliás, o mesmo tipo de argumento mostra que a^b pode ser irracional se a e b forem irracionais. Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional, caso encerrado; se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\sqrt{2}$ é irracional. O caráter não construtivo destas provas revela-se no apelo ao princípio do terceiro excluído (*tertium non datur*), que os intuicionistas rejeitam.

COMPARAÇÃO DE CONJUNTOS INFINITOS

Cantor introduziu um modo bastante natural de comparar os "tamanhos" de conjuntos infinitos.

Definição 2.38 *Dois conjuntos A e B são* ***equipolentes*** *se existe uma bijeção entre eles, e escrevemos* $A \sim B$. *Neste caso dizemos que A e B têm o mesmo* ***número cardinal*** *e escrevemos* Card(A) = Card(B).

Exercício 2.3.1
Prove que a equipolência de conjuntos é uma relação de equivalência.

O número cardinal dos conjuntos enumeráveis é denotada por $\aleph_0$, que se lê "álef zero" (alef é a primeira letra do alfabeto hebraico). Assim, Card($\mathbb{N}$) = Card($\mathbb{Z}$) = Card($\mathbb{Q}$) = $\aleph_0$. A cardinalidade dos números reais (ou **número cardinal do contínuo**) é denotada por **c**: Card($\mathbb{R}$) = **c**. Os números cardinais de conjuntos infinitos são chamados de **números transfinitos**.

Intuitivamente, se $f : A \to B$ é uma aplicação injetiva, o conjunto B tem pelo menos tantos elementos quanto A, já que f faz corresponder elementos distintos de B a elementos distintos de A. Isto motiva a definição a seguir, que introduz uma noção de ordem entre conjuntos.

Definição 2.39 *Dados dois conjuntos A e B, se existe um aplicação injetiva de A em B escrevemos* $A \preccurlyeq B$ *ou* $B \succcurlyeq A$, *e também* Card(A) ≤ Card(B) *ou* Card(B) ≥ Card(A). *Se existe uma injeção de A em B mas não existe uma injeção de B em A escrevemos* $A \prec B$ *ou* $B \succ A$, *e também* Card(A) < Card(B) *ou* Card(B) > Card(A).

Não é óbvio que quaisquer dois conjuntos tenham cardinalidades comparáveis. Seria logicamente possível a inexistência de uma injeção tanto de A em B quanto de B em A. Um teorema de Zermelo, no entanto, garante que

ou $A \prec B$ ou $A \succ B$ ou $A \sim B$ (Halmos 1974). Por outro lado, a notação introduzida na Definição 2.39 é adequada por causa de um resultado famoso e importante.

Teorema 2.40 (Schröder-Bernstein) *Se* Card(A) $\leq$ Card(B) *e* Card(B) $\leq$ Card(A) *então* Card(A) = Card(B).

Este resultado, que também é conhecido como teorema de Cantor-Bernstein ou Cantor-Schröder-Bernstein porque Cantor foi o primeiro a conjecturá-lo, afirma que se existe uma injeção de A em B e outra injeção de B em A, então existe uma bijeção entre A e B. A prova deste teorema é um tanto intrincada e será omitida. Demonstrações com variados graus de sofisticação podem ser encontradas em Halmos (1974), Birkhoff & Mac Lane (1977), Gleason (1991), Kolmogorov & Fomin (1972) e Suppes (1972), entre outras fontes. A prova oferecida por Velleman (2006) é uma das mais cristalinas. O teorema de Schröder-Bernstein é muito útil porque às vezes é muito mais fácil encontrar injeções de A em B e de B em A do que encontrar diretamente uma bijeção entre A e B.

Um conjunto finito com N elementos tem exatamente 2^N subconjuntos (Problema 2.27). Por este motivo, o número cardinal de $\mathscr{P}(A)$ é denotado por $2^{\text{Card}(A)}$. O resultado a seguir, devido a Cantor, estabelece que a cardinalidade dos números reais coincide com a cardinalidade da coleção de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Teorema 2.41 $2^{\aleph_0} = c$.

Demonstração. Comecemos tentando construir uma injeção do intervalo aberto $(0,1)$ de $\mathbb{R}$ em $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Um número real $x \in (0,1)$ pode ser representado na base 2:

$$x = 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} + \cdots,$$

onde cada a_i é igual a 0 ou 1. Para evitar dupla representação, excluamos os números que terminam numa sequência infinita de 1s. Assim, por exemplo, em vez de 0,01011111... escrevemos 0,01100000.... A injeção de $(0,1)$ em $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ é definida da seguinte maneira:

$$x = 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots \mapsto U_x = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 1\}.$$

A cada sequência $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ de 0s e 1s corresponde um subconjunto de $\mathbb{N}$. Por exemplo, ao número $x = 0{,}10011010000\ldots$ corresponde o subconjunto de $\mathbb{N}$ dado por $U_x = \{1,4,5,7\}$. Números que diferem em algum dígito a_i são distintos e os subconjuntos de $\mathbb{N}$ que lhes correspondem são distintos, de modo que a aplicação assim definida é injetiva. Reciprocamente, uma injeção de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ em $(0,1)$ pode ser definida trocando os dígitos 0 e 1 por 3 e 7, por exemplo, e adotando a representação decimal. A um subconjunto U de $\mathbb{N}$ associamos $x_U = 0{,}b_1 b_2 b_3 \ldots$ onde $b_1 = 3$ se $1 \in U$ ou $b_1 = 7$ se $1 \notin U$; $b_2 = 3$ se $2 \in U$ ou $b_2 = 7$ se $2 \notin U$; $b_3 = 3$ se $3 \in U$ ou $b_3 = 7$ se $3 \notin U$; e assim sucessivamente. Esta aplicação é injetiva já que a diferentes subconjuntos de $\mathbb{N}$ são associados diferentes números reais do intervalo $(0,1)$. Pelo teorema de Schröder-Bernstein, o intervalo $(0,1)$ e $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ têm a mesma cardinalidade. Como a cardinalidade de $(0,1)$ é a mesma de $\mathbb{R}$, a demonstração está completa. ∎

O próximo teorema mostra que não existe um número cardinal máximo: qualquer conjunto tem cardinalidade menor do que a coleção de seus subconjuntos.

Teorema 2.42 (Cantor) *Para todo conjunto X tem-se* $\text{Card}(X) < \text{Card}(\mathscr{P}(X))$.

Demonstração. Em primeiro lugar, $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(\mathscr{P}(X))$ porque a aplicação $x \mapsto \{x\}$ é uma injeção de X em $\mathscr{P}(X)$. Se $\text{Card}(\mathscr{P}(X)) \leq \text{Card}(X)$ temos $\text{Card}(X) = \text{Card}(\mathscr{P}(X))$ pelo teorema de Schröder-Bernstein. Provaremos que isto é impossível mostrando que não pode existir uma bijeção entre X e $\mathscr{P}(X)$. Suponha que $f : X \to \mathscr{P}(X)$ seja uma aplicação bijetiva e considere o seguinte elemento de $\mathscr{P}(X)$:

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Note que $f(x)$ é um elemento de $\mathscr{P}(X)$, ou seja, é um subconjunto de X. Um elemento $x \in X$ ou pertence a $f(x)$ ou não pertence a $f(x)$, de modo que A é um subconjunto de X bem definido. Provemos que A não é a imagem de nenhum elemento de X. Dado $a \in X$, há duas possibilidades: $a \in f(a)$ ou $a \notin f(a)$. De acordo com a definição de A, se $a \in f(a)$ então $a \notin A$, e se $a \notin f(a)$ então $a \in A$. Em qualquer caso, $A \neq f(a)$ e f não é sobrejetiva, o que contradiz a hipótese de que f é uma bijeção. ∎

Em 1877, Cantor fez outra descoberta sensacional: existe uma correspondência biunívoca entre pontos da reta real e pontos do plano! Esse resultado

clamorosamente contrário à intuição,[3] do qual há uma prova em Birkhoff & MacLane (1977), estabelece a independência das noções de cardinalidade e dimensão. Na verdade, Cantor provou que $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ e o produto cartesiano de uma coleção enumerável de cópias de $\mathbb{R}$ têm a mesma cardinalidade!

As ideias altamente heterodoxas de Cantor não foram aceitas sem resistência. Elas encontraram em Kronecker um feroz opositor, que chegou a dizer que a teoria de Cantor podia ser teologia ou filosofia, mas não era Matemática. A despeito de seus detratores, as ideias arrojadas de Cantor foram aos poucos sendo incorporadas à matemática corrente graças à influência de eminentes matemáticos tais como Dedekind e Hilbert. Este último defendeu Cantor com uma frase que se tornaria célebre: "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós."

2.4 *Paradoxos da Teoria dos Conjuntos*

> The relation between Cantor's set theory and mathematics was like the course of true love; it never did run smooth.
>
> STEPHEN COLE KLEENE, *Mathematical Logic*

Cantor definiu de forma extremamente ampla a noção de conjunto como *uma coleção de objetos definidos e distintos de nossa intuição ou de nosso pensamento.* A teoria dos conjuntos de Cantor também se apoia no **axioma da abstração**, segundo o qual dada qualquer propriedade existe um conjunto cujos membros são exatamente aqueles objetos que gozam da referida propriedade.

Um **paradoxo** ou uma **antinomia** é uma declaração que se contradiz a si mesma. Em 1897 surgiu o primeiro paradoxo da teoria dos conjuntos, anunciado pelo italiano Burali-Forti. Este paradoxo é técnico demais para ser descrito aqui, mas guarda parentesco com um paradoxo descoberto por Cantor dois anos depois. Seja $\mathcal{U}$ o conjunto de todos os conjuntos. Obviamente, o número cardinal de $\mathcal{U}$ é o maior possível. No entanto, pelo Teorema 2.42, o número cardinal da coleção de todos os subconjuntos de $\mathcal{U}$ é maior do que o número cardinal de $\mathcal{U}$.

3. "Eu vejo mas não acredito!", escreveu Cantor a Dedekind sobre sua incrível descoberta.

Os paradoxos de Burali-Forti e Cantor envolvem teoremas da teoria dos conjuntos. Em 1902, Bertrand Russell descobriu um paradoxo que resulta do próprio conceito de conjunto, e cuja fonte é o axioma da abstração. Para descrever o paradoxo de Russell é preciso reconhecer que, por estranho que pareça, existem conjuntos que são membros de si próprios. Considere, por exemplo, a coleção $\mathscr{I}$ de todos os conjuntos infinitos. Como há uma infinidade de conjuntos infinitos, $\mathscr{I}$ é membro de si mesmo. Uma vez estabelecida, com um apelo ao axioma da abstração, a existência de conjuntos que são membros de si próprios, Russell considerou a coleção N de todos os conjuntos que não são membros de si próprios e se perguntou: N é membro de si próprio? Se N é membro de si próprio então N não é membro de si próprio porque os membros de N são apenas os conjuntos que não são membros de si próprios. Se N não é membro de si próprio então N é membro de si próprio pela definição de N. O paradoxo reside no fato de qualquer hipótese conduzir a uma contradição.

Este paradoxo pode ser descrito de forma muito mais sucinta em símbolos. Seja X um conjunto qualquer. Por definição,

$$(X \in N) \leftrightarrow (X \notin X).$$

A escolha $X = N$ leva à contradição

$$(N \in N) \leftrightarrow (N \notin N).$$

Russel comunicou este paradoxo ao grande lógico alemão Gottlob Frege quando este estava a ponto de completar o segundo volume do seu tratado "Leis Fundamentais da Aritmética", em que presumia haver construído a aritmética de modo logicamente impecável com base na teoria dos conjuntos. Frege, que investira mais de dez anos em sua obra, registrou seus agradecimento a Russell, no fim do livro, nos seguintes termos melancólicos: "Dificilmente um cientista pode enfrentar uma situação mais desagradável do que a de presenciar o abalo dos fundamentos de uma obra sua, logo depois de concluí-la. Pois uma carta do Sr. Bertrand Russell, exatamente quando este segundo volume estava prestes a ser concluído, colocou-me nessa situação."

Em 1919, Russell popularizou o seu paradoxo na forma do dilema de um barbeiro. Num vilarejo há um barbeiro que resolveu fazer a barba de todos os

homens que não se barbeiam a si mesmos, e somente desses. O paradoxo vem à tona quando o barbeiro tenta decidir se faz ou não a sua própria barba. Se ele não se barbeia a si mesmo, por sua regra ele se barbeia a si mesmo; se ele se barbeia a si mesmo, pela regra ele não se barbeia a si mesmo.

Além dos paradoxos lógicos ou matemáticos, foram descobertos vários paradoxos linguísticos ou semânticos. O mais velho paradoxo semântico conhecido é o *paradoxo de Epimênides* ou *paradoxo do mentiroso*. Consta que o filósofo cretense Epimênides teria declarado: "Todos os cretenses são mentirosos." Interpretando a palavra "mentiroso" como designando alguém que nunca diz a verdade, a declaração é autocontraditória e dá lugar a um paradoxo. Há também a antiga fábula do crocodilo que raptou uma criança, mas oferece a possibilidade de devolvê-la ao pai desde que este seja capaz de adivinhar se a criança será ou não devolvida. Se o pai disser que o crocodilo não devolverá a criança, o crocodilo estará diante de um dilema. Um paradoxo moderno similar a essas antinomias da antiguidade é o paradoxo de Berry. Considere a expressão "o menor número natural que não pode ser nomeado em menos que vinte palavras." Esta expressão nomeia um certo número natural n porque qualquer subconjunto de $\mathbb{N}$ — no caso, o dos números naturais que não podem ser nomeados em menos que vinte palavras — possui um menor elemento. Por sua definição, n não pode ser nomeado em menos que vinte palavras, mas a expressão acima que nomeia n tem apenas quatorze palavras.

Antinomias como as de Cantor e Russell resultam da aceitação de conjuntos "grandes demais" ou de definições que envolvem auto-referência, conhecidas como definições impredicativas. Por meio de axiomas cuidadosamente escolhidos que, com o sacrifício parcial da intuição, proíbem a existência do "conjunto de todos os conjuntos", entre outras coisas, a teoria axiomática dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel ou Zermelo-Fraenkel-Skolem é capaz de bloquear tanto os paradoxos lógico-matemáticos quanto os linguístico-semânticos (Suppes 1972).

2.5 *Hipótese do Contínuo e Axioma da Escolha*

A descoberta de que os números reais formam um conjunto não enumerável suscitou imediatamente uma pergunta: existe algum conjunto cujo número cardinal seja maior do que $\aleph_0$ e menor do que $\mathbf{c}$? Cantor conjecturou que a

resposta era negativa, e essa conjectura tornou-se conhecida como **hipótese do contínuo**. Provar a hipótese do contínuo é o primeiro problema da célebre lista de 23 problemas em aberto apresentada por Hilbert no Congresso Internacional de Matemática no ano de 1900, em Paris.[4] Cantor acreditava na hipótese do contínuo e tentou prová-la durante muitos anos, sem sucesso. O problema acabou sendo resolvido de uma forma imprevista. Kurt Gödel, em 1940, e Paul Cohen, em 1963, estabeleceram, respectivamente, a consistência tanto da hipótese do contínuo quanto de sua negação com os postulados da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel, desde que esses próprios postulados sejam consistentes. A hipótese do contínuo é independente do sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel, que é impotente para prová-la ou refutá-la.

Um outro tema profundo e polêmico da teoria dos conjuntos relaciona-se com a problema da possibilidade de introduzir uma relação de ordem muito especial num conjunto arbitrário. Os números reais podem ser ordenados em ordem crescente, e dizemos que x precede y se $x < y$. A noção de "preceder" pode ser caracterizada axiomaticamente.

Definição 2.43 *Um conjunto A é dito **linearmente ordenado** ou **totalmente ordenado** pela relação de ordem $\prec$, que se lê "precede", se e somente se, para todos os $a, b, c \in A$, verificam-se os seguintes axiomas:*

O1 *Se $a \neq b$ então $a \prec b$ ou $b \prec a$;*

O2 *Se $a \prec b$ então $a \neq b$;*

O3 *Se $a \prec b$ e $b \prec c$ então $a \prec c$.*

Definição 2.44 *O conjunto A é dito **bem-ordenado** pela relação de ordem $\prec$ se e somente se é linearmente ordenado e o seguinte axioma adicional se verifica:*

O4 *Se B é um subconjunto não vazio de A, existe um elemento $b \in B$ tal que $b \prec \tilde{b}$ para qualquer outro elemento $\tilde{b} \in B$.*

Em outras palavras: um conjunto é bem-ordenado pela relação $\prec$ se cada um de seus subconjuntos não vazios possui um primeiro elemento.

4. A lista dos 23 problemas de Hilbert pode ser encontrada na página 82 de Reid (1986) e a palestra completa de Hilbert está traduzida para o inglês em Hilbert (1902).

Exemplo 2.5.1
Em conformidade com nossa intuição e com o Teorema 1.19, o conjunto dos números naturais é bem-ordenado com $\prec$ significando "menor que". Exemplos mais exóticos de boa ordenação podem ser fabricados. Defina a relação $\prec$ em $\mathbb{N}$ da seguinte maneira: $a \prec b$ se a é ímpar e b é par; $a \prec b$ se a e b são ambos ímpares ou ambos pares e $a < b$. A ordem imposta aos números naturais neste caso é

$$1,3,5,7,\ldots;2,4,6,8,\ldots.$$

Note que 2 tem uma infinidade de antecessores mas não possui um antecessor imediato.

Em 1904, o matemático alemão Ernst Zermelo[5] provou um surpreendente teorema — mais uma das conjecturas de Cantor — a respeito de conjuntos bem-ordenados.

Teorema 2.45 (Teorema da Boa Ordenação) *Se X é um conjunto arbitrário, existe uma relação de ordem em X que faz dele um conjunto bem-ordenado.*

Muitos matemáticos reagiram com assombro a este teorema, que parecia fantástico demais para ser crível — há uma prova em Halmos (1974). O conjunto dos números reais não é bem-ordenado pela relação "menor que", pois o subconjunto formado pelos números reais x tais que $0 < x < 1$ não tem um primeiro elemento. Ninguém jamais conseguiu definir uma relação de ordem em $\mathbb{R}$ capaz de torná-lo um conjunto bem-ordenado, e alguns matemáticos acreditam que nenhuma exista. Em sua demonstração, Zermelo se valeu de

5. Zermelo começou sua carreira como assistente da Max Planck, mas logo seus interesses se voltaram para a teoria dos conjuntos. Quando perguntado sobre a origem de seu estranho sobrenome, dizia jocosamente que era uma forma abreviada de *Waltzermelodie* (melodia de valsa). Apreciador do bom e velho *scotch*, ele alegava ter provado a impossibilidade de se alcançar o Polo Norte. Segundo ele, era inconcebível qualquer expedição ao Polo Norte sem um suprimento generoso de uísque. Como a quantidade de uísque que deve ser estocada é proporcional à tangente da latitude — isto é axiomático —, para alcançar o Polo Norte seria necessária uma quantidade infinita de uísque (Reid 1986).

um princípio aparentemente óbvio que ninguém havia explicitado como uma hipótese.

Axioma da Escolha Dado qualquer conjunto X, existe uma uma função f que associa a cada subconjunto não vazio A de X um elemento de A, ou seja, $f(A) \in A$.

A função f "escolhe" um elemento particular $f(A)$ de cada subconjunto não vazio A do conjunto X. Diz-se que f é uma função de escolha, e o axioma da escolha afirma que todo conjunto X tem uma função de escolha. O conjunto X pode ser infinito e não enumerável, caso em que uma função de escolha envolve infinitas escolhas arbitrárias, pois não precisa haver nenhuma regra que especifique o elemento de A escolhido por f. A ausência de uma definição construtiva de uma função de escolha levou alguns matemáticos a rejeitar o axioma da escolha. O matemático francês Émile Borel chegou a afirmar que raciocínios baseados numa escolha arbitrária feita um número infinito de vezes não pertencem à Matemática. Note que o axioma da escolha permite produzir um conjunto formado por um elemento de cada conjunto de uma coleção arbitrária de conjuntos não vazios. O cerne da dificuldade é exposto com clareza pela seguinte observação de Bertrand Russell: o axioma da escolha é necessário para selecionar um conjunto a partir de um número infinito de pares de meias, mas não de um número infinito de pares de sapatos. No caso dos pares de sapatos, uma função fica bem definida pela escolha, por exemplo, do pé esquerdo de cada par de sapatos. No caso das meias, sem o axioma da escolha não se pode asseverar a existência de uma função de escolha porque as meias de cada par são indistinguíveis.

Outra consequência inquietante do axioma da escolha é o paradoxo de Banach-Tarski. Em 1924, Stefan Banach e Alfred Tarski mostraram que, com um apelo ao axioma da escolha, é possível dividir uma esfera em cinco partes disjuntas, movê-las rigidamente no espaço e juntá-las novamente para formar duas esferas iguais à original. Em sua versão mais dramática (Wapner 2005), o teorema assegura que uma esfera do tamanho de uma ervilha pode ser decomposta num número finito de pedaços que, depois de juntados novamente, formam um esfera do tamanho do Sol! A aparente possibilidade de criar matéria do nada torna esse teorema intolerável. A raiz do paradoxo reside na suposição de que qualquer subconjunto limitado de $\mathbb{R}^3$ possui um volume.

Curiosamente, a causa da doença é também sua cura: o próprio axioma da escolha implica a impossibilidade de atribuir um volume a um subconjunto limitado arbitrário de $\mathbb{R}^3$. As partes em que a esfera é dividida no teorema de Banach-Tarski não possuem um volume definido, daí não se poder concluir que o sólido obtido juntando essas partes tenha um volume igual à soma dos volumes das partes. Ainda assim, é espantoso que o axioma da escolha conduza a um teorema tão extraordinário.

Ocorre que o axioma da escolha pode ser provado facilmente a partir do teorema da boa ordenação de Zermelo se este for admitido como axioma (Problema 2.30). Portanto, o teorema da boa ordenação e o axioma da escolha são equivalentes. Outra proposição equivalente ao axioma da escolha é o lema de Zorn, que se refere a conjuntos parcialmente ordenados e é um pouco menos ofensivo à intuição que o teorema da boa ordenação de Zermelo. A equivalência entre o axioma da escolha e o teorema (ou princípio) da boa ordenação é uma das fontes do embaraço intuitivo causado pelo axioma da escolha, exposto espirituosamente pelo matemático americano J. L. Bona (*apud* Herrlich 2006): "The Axiom of Choice is obviously true, the Well Ordering Principle is obviously false; and who can tell about Zorn's Lemma?" As objeções ao axioma da escolha devem-se principalmente ao seu caráter puramente existencial, pois afirma a existência de uma função de escolha ser dar nenhuma pista sobre como construí-la. Hoje em dia são raros os matemáticos que não aceitam como válidos teoremas provados com o uso do axioma da escolha. Ainda assim, mesmo os que aceitam tais teoremas se perguntam se eles não poderiam ser demonstrados sem o seu emprego. Se o axioma da escolha é usado numa demonstração costuma-se chamar a atenção para o fato. É considerada uma realização significativa a descoberta de uma demonstração alternativa, que não utilize o axioma da escolha, para algum teorema importante da análise ou da teoria dos conjuntos.

Kurt Gödel e Paul Cohen provaram que o axioma da escolha é logicamente independente dos demais axiomas da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Isto significa que supor o axioma da escolha ou sua negação não produz nenhuma contradição que não pudesse ser obtida sem essa suposição. A teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o acréscimo do axioma da escolha constitui o chamado sistema ZFC.

A prova de que a hipótese do contínuo e o axioma da escolha são independentes dos axiomas de Zermelo-Fraenkel põe a teoria dos conjuntos numa situação análoga à da geometria depois do aparecimento das geometrias não euclidianas, que tornou claro que o postulado das paralelas é independente dos demais axiomas de Euclides. Assim como há muitas geometrias, parece haver muitas teorias dos conjuntos.

Leituras Adicionais Selecionadas[6]

- • Birkhoff, G. e Mac Lane, S. 1977 *A Survey of Modern Algebra.*
- Bloch, E. D. 2000 *Proofs and Fundamentals.*
- Gleason, A. M. 1991 *Fundamentals of Abstract Analysis.*
- • Halmos, P. R. 2005 *Naive Set Theory.*
- • Velleman, D. J. 2006 *How To Prove It: A Structured Approach.*

Problemas

2.1. Prove que $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

2.2. Sejam $A, B \subset X$. (a) Prove que $A \cap B = \varnothing$ se e somente se $A \subset B^c$. (b) Prove que $A \cup B = X$ se e somente se $A^c \subset B$.

2.3. Sejam $A, B \subset X$. Prove que $A \subset B$ se e somente se $A \cap B^c = \varnothing$.

2.4. Dê um exemplo de conjuntos A, B, C tais que $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$.

2.5. Dados $A, B \subset X$ tais que $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = X$, prove que $B = A^c$.

2.6. Prove que se $A \subset B$ então $B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A$ para todo conjunto C. Prove, ainda, que se existe C tal que a igualdade anterior é satisfeita, então $A \subset B$.

2.7. Sejam $A, B \subset X$. Prove que $A = B$ se e somente se $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \varnothing$.

2.8. Prove que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

6. A lista completa de referências, com plenos detalhes bibliográficos, encontra-se na Bibliografia no fim do livro. O símbolo • destaca obras cuja leitura é altamente recomendada.

2.9. Seja $A\Delta B$ a diferença simétrica dos conjuntos A e B, definida pela equação (2.3). Prove que $A\Delta B = A\Delta C$ implica $B = C$.

2.10. Sejam A, B e C conjuntos. Determine X de modo que a equação

$$(A\Delta B) \cap C = (C \setminus A)\Delta X$$

seja uma identidade.

2.11. Dados dois conjuntos X e Y, a regra de cancelamento a seguir não é válida: se $X \times Y = X \times Z$ então $Y = Z$. Enuncie e prove a regra correta.

2.12. Considere a relação R definida da seguinte maneira no conjunto dos números reais: xRy se e somente se $x - y \in \mathbb{Q}$. (a) Prove que R é uma relação de equivalência. (b) Mostre que as soluções da equação $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ são representantes de apenas três classes de equivalência distintas.

2.13. Considere uma função $f : A \to B$. (a) Prove que $f(X \setminus Y) \supset f(X) \setminus f(Y)$ quaisquer que sejam $X, Y \subset A$. (b) Prove que se f for injetiva tem-se $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$ para todos os $X, Y \subset A$.

2.14. Prove que a função $f : A \to B$ é injetiva se e somente se $f(A \setminus X) = f(A) \setminus f(X)$ para todo $X \subset A$.

2.15. Dada a função $f : A \to B$, prove que:
(a) $f^{-1}(f(X)) \supset X$ para todo $X \subset A$;
(b) f é injetiva se e somente se $f^{-1}(f(X)) = X$ para todo $X \subset A$.

2.16. Dada a função $f : A \to B$, prove que:
(a) $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$ para todo $Y \subset B$;
(b) f é sobrejetiva se e somente se $f(f^{-1}(Y)) = Y$ para todo $Y \subset B$.

2.17. Seja f uma função de A em B. Se $X \subset A$ e $Y \subset B$, prove que $f(X \cap f^{-1}(Y)) = f(X) \cap Y$.

2.18. Seja $\{A_{ij}\}$ uma coleção de conjuntos com $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Demonstre a igualdade

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{ij}\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right)$$

ou refute-a por meio de um contraexemplo.

2.19. Seja X um conjunto infinito enumerável. Prove que a coleção dos subconjunto *finitos* de X é enumerável.

2.20. Sejam X um conjunto infinito arbitrário e A um conjunto enumerável. Prove que $X \sim A \cup X$.

2.21. (a) Prove que $(0,1) \sim [0,1]$ de duas maneiras distintas: exibindo uma bijeção entre os dois conjuntos; usando o teorema de Schröder-Bernstein. (b) Explique como estabelecer uma correspondência bijetiva entre $\mathbb{R}$ e o conjunto dos números irracionais.

2.22. Prove que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ é um número algébrico.

2.23. Tendo em conta que π é transcendente, o que se pode concluir sobre $\sqrt{\pi}$? E sobre π^2? Sugestão: suponha que $\sqrt{r}$ seja raiz do polinômio $P(x)$ e note que o produto $P(x)P(-x) = Q(x^2)$, ou seja, é um polinômio par porque é invariante sob a troca de x por $-x$.

2.24. Sejam X um conjunto infinito e Y um conjunto finito. Mostre que existe uma função sobrejetiva $f : X \to Y$ e uma função injetiva $g : Y \to X$.

2.25. Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por: $f(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$. Prove que f é uma bijeção.

2.26. Seja X um conjunto e $\mathscr{P}(X)$ a coleção dos subconjuntos de X. Que diferença existe, se é que há alguma, entre $A \in \mathscr{P}(X)$ e $A \subset \mathscr{P}(X)$?

2.27. Se X é um conjunto finito com N elementos, prove que $\mathscr{P}(X)$ tem 2^N elementos.

2.28. Prove que $[(\forall x \in A)P(x)] \wedge [(\forall x \in B)P(x)]$ é equivalente a $(\forall x \in A \cup B)P(x)$.

2.29. Mostre que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ para todos os conjuntos A e B. Mostre que, em geral, $\mathscr{P}(A \cup B) \neq \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

2.30. Prove que o axioma da escolha decorre do teorema da boa ordenação de Zermelo.

2.31. Com base nas ideias utilizadas na demonstração do Teorema 2.37 e numa identidade simples, prove que um número racional elevado a uma potência irracional pode ser irracional.

Parte II

Tópicos de Análise

3

Números Reais e Complexos

Nos capítulos anteriores os números reais foram utilizados de modo informal. Deve-se a Richard Dedekind a primeira fundamentação rigorosa dos números reais (Dedekind 1963). Ele mostrou[1] como os números irracionais podem ser definidos a partir dos racionais por meio dos hoje chamados *cortes de Dedekind*. Adotaremos um ponto de vista diferente: estamos interessados em descrever como definir os números reais axiomaticamente. As propriedades dos números reais são absolutamente cruciais para a análise matemática, e todas elas podem ser deduzidas dos axiomas que enunciaremos a seguir. Como alguns subconjuntos dos axiomas definem estruturas matemáticas de interesse próprio, costuma-se agrupar os axiomas conforme sua natureza.

3.1 *Axiomas Algébricos: Grupos e Corpos*

Uma operação binária num conjunto A é uma regra por meio da qual se associa a cada par de elementos de A um único elemento de A.

Definição 3.1 *Uma operação binária num conjunto A é uma aplicação de $A \times A$ em A.*

Definição 3.2 (Números Reais) *O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um conjunto de objetos que satisfazem os Axiomas 1 a 13 descritos a seguir.*

Axioma 1 Existe uma operação binária em $\mathbb{R}$, denotada por $+$ e chamada **adição**, que associa aos números reais x e y o número real $x + y$.

1. Em 1858, mas suas ideias só foram publicadas em 1872.

AXIOMAS DA ADIÇÃO

Axioma 2 Associatividade: $(x+y)+z = x+(y+z)$ para todos os $x,y,z \in \mathbb{R}$.

Axioma 3 Comutatividade: $x+y = y+x$ para todos os $x,y \in \mathbb{R}$.

Axioma 4 Existência de elemento neutro: existe um elemento $0 \in \mathbb{R}$, chamado *zero*, tal que $x+0 = x$ para todos os números reais x.

Axioma 5 Existência de simétrico ou inverso aditivo: cada $x \in \mathbb{R}$ possui um simétrico $-x \in \mathbb{R}$ tal que $-x+x = 0$.

A **diferença** $x-y$ de dois elementos de $\mathbb{R}$ é definida como igual à adição $x+(-y)$, e a operação binária $(x,y) \mapsto x-y$ chama-se **subtração**. A partir destes axiomas prova-se facilmente que: (i) o zero é único; (ii) o simétrico é único; (iii) $x-y = z \Leftrightarrow x = y+z$; (iv) vale a regra de cancelamento $x+z = y+z \Rightarrow x = y$. Assim, todas as regras elementares relativas à soma e à subtração decorrem dos axiomas acima.

Exercício 3.1.1
Demonstre as afirmações (i) a (iv) do parágrafo anterior.

Um conjunto munido de uma operação binária obedecendo aos Axiomas 2 a 5 acima constitui um **grupo abeliano** ou **comutativo**. Se a comutatividade for relaxada, os Axiomas 2, 4 e 5 definem genericamente um **grupo**. Assim, um grupo é um conjunto dotado de uma operação binária associativa e de um elemento neutro, também chamado *identidade*, tal que todo elemento do conjunto possui um inverso relativamente à referida operação binária.

Axioma 6 Existe uma operação binária em $\mathbb{R}$, denotada por $\cdot$ e chamada **multiplicação**, que associa aos números reais x e y o número real $x \cdot y$ (ou simplesmente xy).

AXIOMAS DA MULTIPLICAÇÃO

Axioma 7 Associatividade: $(xy)z = x(yz)$ para todos os $x,y,z \in \mathbb{R}$.

Axioma 8 Comutatividade: $xy = yx$ para todos os $x,y \in \mathbb{R}$.

Axioma 9 Existência de elemento neutro: existe $1 \in \mathbb{R}$, chamado *um*, tal que $1 \neq 0$ e $1x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Axioma 10 Existência de inverso multiplicativo: cada $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$ possui um inverso $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $xx^{-1} = 1$.

Se $y \neq 0$, o **quociente** x/y de dois elementos $x, y \in \mathbb{R}$ é definido como igual ao produto xy^{-1}, e a operação binária $(x,y) \mapsto x/y$ chama-se **divisão.** A divisão por zero não está definida: $x/0$ não tem sentido. A partir destes quatro últimos axiomas prova-se imediatamente que: (i) o 1 é único; (ii) o inverso é único; (iii) se $y \neq 0$ então $x/y = z \Leftrightarrow x = yz$; (iv) vale a regra de cancelamento $xz = yz \Rightarrow x = y$ sempre que $z \neq 0$. Assim, todas as regras elementares relativas à multiplicação e à divisão decorrem destes quatro últimos axiomas.

Exercício 3.1.2
Demonstre as afirmações (i) a (iv) do parágrafo anterior.

Os números reais diferentes de zero formam um grupo abeliano relativamente à operação de multiplicação, com o 1 como elemento neutro e o inverso x^{-1} em lugar de $-x$.

O último axioma algébrico relaciona as operações de adição e multiplicação.

Axioma 11 Distributividade: $x(y+z) = xy + xz$ para todos os $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Do axioma da distributividade decorrem algumas das principais regras da álgebra. Por exemplo, $x0 = 0x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ porque $x0 + x = x0 + x1 = x(0+1) = x1 = x$, que implica $x0 = 0$ pela regra de cancelamento da adição. Além disso, se $xy = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$ porque se $x \neq 0$ temos $y = 0$ pela regra de cancelamento da multiplicação. As regras de sinais $(-x)y = -xy$ e $(-x)(-y) = xy$ também resultam da distributividade: (i) $(-x)y + xy = (-x + x)y = 0y = 0 \Rightarrow (-x)y = -xy \Rightarrow -((-x)y) = xy$, esta última implicacão sendo válida por causa da unicidade do simétrico; (ii) $0 = (-x)0 = (-x)(-y + y) = (-x)(-y) + (-x)y \Rightarrow (-x)(-y) = -((-x)y) = xy$.

Definição 3.3 (Corpo) *Um **corpo** (*field*, em inglês) é um conjunto no qual estão definidas operações binárias de adição e multiplicação que obedecem aos Axiomas 2 a 5 e 7 a 11.*

Exemplo 3.1.1
O conjunto dos números racionais com as operações de adição e multiplicação $p/q + p'/q' = (pq' + p'q)/qq'$ e $(p/q)(p'/q') = pp'/qq'$ é um corpo. Também é um corpo o conjunto $\mathbb{Z}_2$ formado apenas pelos dois elementos distintos 0 e 1 com a seguinte definição de soma e produto: $0+0=0$; $0+1=1+0=1$; $1+1=0$; $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$; $1 \cdot 1 = 1$.

Exercício 3.1.3
Prove que, com as operações usuais de soma e produto, os números da forma $a+b\sqrt{2}$, com $a,b \in \mathbb{Q}$, formam um corpo.

3.2 *Axioma de Ordem: Corpos Ordenados*

Os números reais podem ser ordenados, e o próximo axioma serve de base para o estabelecimento de uma relação de ordem em $\mathbb{R}$.

Axioma 12. Existe um subconjunto P de $\mathbb{R}$, cujos elementos são chamados de **números reais positivos**, tal que:

(i) Se x e y pertencem a P então $x+y$ e xy estão ambos em P.

(ii) Vale a *Lei da Tricotomia*: se $x \in \mathbb{R}$ então exatamente uma das três possibilidades ocorre: $x \in P$ ou $x = 0$ ou $-x \in P$.

Este axioma afirma que tanto a soma quanto o produto de elementos positivos são positivos. Além disso, um elemento qualquer de $\mathbb{R}$ é positivo, zero ou o seu simétrico é positivo. Se denotarmos por $-P$ o conjunto dos elementos $-x$ com $x \in P$, temos a decomposicão $\mathbb{R} = P \cup (-P) \cup \{0\}$ dos números reais em três subconjuntos disjuntos. Os membros de $-P$ são chamados de **números reais negativos**.

Definição 3.4 (Corpo Ordenado) *Um **corpo ordenado** é um corpo dotado de um subconjunto P que obedece ao Axioma 12.*

O Axioma 12 permite introduzir uma relação de ordem em $\mathbb{R}$ ou em qualquer corpo ordenado.

Definição 3.5 *Sejam x e y elementos de um corpo ordenado K.*

(i) $x > y$ *se e somente se* $x - y \in P$.

(ii) $x \geq y$ *se e somente se* $x > y$ *ou* $x = y$.

(iii) $x < y$ *se e somente se* $y > x$.

(iv) $x \leq y$ *se e somente se* $y \geq x$.

A desigualdade $x > y \, (x < y)$ lê-se "x é maior (menor) que y" e a desigualdade $x \geq y \, (x \leq y)$ lê-se "x é maior (menor) ou igual a y".

Teorema 3.6 *Dado um corpo ordenado K:*

(i) Se $x \in K$ *e* $x \neq 0$ *então* $x^2 > 0$.

(ii) Se $x > y$ *então* $x + z > y + z \; \forall x,y,z \in K$.

(iii) Se $x > y$ *e* $z > 0$ *então* $xz > yz \; \forall x,y,z \in K$.

(iv) Se $x > y$ *e* $z < 0$ *então* $xz < yz \; \forall x,y,z \in K$.

Demonstração. Provaremos (i) e (iii), ficando o resto como exercício. (i) Pelo Axioma 12, se $x \neq 0$ então $x \in P$ ou $-x \in P$. No primeiro caso $x^2 = x \cdot x \in P$ e, no segundo, $x^2 = x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \in P$. (iii) Se $x > y$ e $z > 0$ então $x - y \in P$ e $z = z - 0 \in P$. Portanto, $xy - xz = (x - y)z \in P$ donde $xy > xz$. ∎

Como $1 \neq 0$ pelo Axioma 9 e $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$, decorre do item (i) deste último teorema que $1 > 0$. Em particular, o corpo $\mathbb{Z}_2$ do Exemplo 3.1.1 não é ordenado porque $1 + 1 = 0$, o que viola o Axioma 12. Como $1 > 0$ em todo corpo ordenado K, resulta que $1 < 1+1 < 1+1+1 < \ldots$ e o subcojunto de K formado por esses elementos é infinito e pode ser identificado com o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Considerando, a seguir, o zero e os elementos simétricos de $\mathbb{N}$ podemos encarar $\mathbb{Z}$ como subconjunto de K. Finalmente, considerando todos os elementos $p/q = pq^{-1}$ com $q,p \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, resulta que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ pode ser visto como subconjunto de K. Em suma, dado qualquer corpo ordenado K temos as inclusões naturais $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset K$.

Num corpo ordenado é possível introduzir a importante noção de intervalo.

Definição 3.7 *Sejam $a,b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Definimos a seguinte notação:*

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}; \quad [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\};$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}; \quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\};$$

$$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<a\};\quad (-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\leq a\};$$
$$[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x\};\quad (a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\};$$
$$(-\infty,\infty)=\mathbb{R}.$$

Definição 3.8 *Seja x um número real. Então*

$$|x|=\begin{cases} x & se\ x\geq 0 \\ -x & se\ x<0 \end{cases} \tag{3.1}$$

é o ***valor absoluto*** *ou* ***módulo*** *de x.*

Por sua definição, $|x|$ é não negativo e é o maior[2] entre os elementos x e $-x$:

$$|x|=\max\{x,-x\}. \tag{3.2}$$

Portanto, $|x|\geq x$ e $|x|\geq -x$. Multiplicando esta última desigualdade por -1 resulta

$$-|x|\leq x\leq |x|. \tag{3.3}$$

Teorema 3.9

(i) Se $\epsilon>0$ então $|x|<\epsilon$ se e somente se $-\epsilon<x<\epsilon$, e $|x|\leq\epsilon$ se e somente se $-\epsilon\leq x\leq\epsilon$.

(ii) $|xy|=|x|\,|y|$ para todos os $x,y\in\mathbb{R}$.

(iii) $|x+y|\leq|x|+|y|$ para todos os $x,y\in\mathbb{R}$.

Demonstração. Faremos apenas a demonstração de (iii), que consiste simplesmente em somar as inequações $-|x|\leq x\leq|x|$ e $-|y|\leq y\leq|y|$ para obter

$$-(|x|+|y|)\leq x+y\leq|x|+|y|.$$

Pelo item (i), isto equivale à desigualdade (iii). ∎

3.3 *Axioma do Supremo: Corpos Ordenados Completos*

Para poder enunciar o último axioma que caracteriza o conjunto dos números reais, precisamos de algumas definições preliminares.

2. Por definição, se $a=b$ então $\max\{a,b\}=a$ e o mesmo se aplica a $\min\{a,b\}$.

Definição 3.10 *Um subconjunto não vazio X de $\mathbb{R}$ é dito* ***limitado superiormente (inferiormente)*** *se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq a$ $(x \geq a)$ para todo $x \in X$. O elemento a é chamado de* ***cota superior (inferior)*** *de X.*

Definição 3.11 *Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ é dito* ***supremo*** *de X se é a menor de suas cotas superiores, isto é:*
S1 a é uma cota superior de X;
S2 Se b é uma cota superior de X então $a \leq b$.
Um elemento $a \in \mathbb{R}$ é dito ***ínfimo*** *de X se é a maior de suas cotas inferiores, isto é:*
I1 a é uma cota inferior de X;
I2 Se b é uma cota inferior de X então $b \leq a$.

A segunda condição que caracteriza a como o supremo de X pode ser reformulada nos seguintes termos: se $b \in \mathbb{R}$ e $b < a$ então existe $x \in X$ tal que $x > b$. De fato, se isto não fosse verdade concluiríamos que b é uma cota superior de X menor que o supremo de X. Também decorre da definição de supremo que se dois elementos a e a' satisfazem as condições S1 e S2 acima então $a \leq a'$ e $a' \leq a$, de modo que $a = a'$. Portanto, o supremo de um conjunto X, se existe, é único e se denota por $\sup X$. As condições que caracterizam o supremo podem ser assim descritas:
S1 $x \in X \Rightarrow x \leq \sup X$;
S2 $x \leq b$ para todo $x \in X \Rightarrow \sup X \leq b$;
S3 Se $b < \sup X$ então existe $x \in X$ tal que $x > b$.

Resultados inteiramente análogos, com os sentidos das desigualdades invertidos, valem para o ínfimo de um conjunto X, que se denota por $\inf X$.

Exemplo 3.3.1
Se $X = (0,1)$ então $\sup X = 1$ e $\inf X = 0$, ao passo que se $Y = [0,1]$ então $\sup Y = 1$ e $\inf Y = 0$. Se $Z = \{1/2, 2/3, \ldots, n/n+1, \ldots\}$ segue-se que $\sup Z = 1$ e $\inf Z = 1/2$.

Embora, intuitivamente, o supremo (ínfimo) de um conjunto de números reais comporte-se como se fosse o seu elemento máximo (mínimo), isto não deve nem pode ser levado ao pé da letra porque o supremo (ínfimo) de um conjunto não precisa pertencer ao conjunto, como acabamos de ver no Exemplo

3.3.1. Se $\sup X$ é um elemento de X, escrevemos $\sup X = \max X$; da mesma forma, escrevemos $\inf X = \min X$ se o ínfimo é um elemento do conjunto X.

Axioma 13. Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que é limitado superiormente tem um supremo em $\mathbb{R}$.

É este último axioma que distingue os números racionais dos reais. O conjunto dos números racionais tem "buracos", ao passo que o conjunto dos números reais é completo. Se houvesse um "buraco" na reta real, o conjunto de pontos à esquerda do "buraco" não teria supremo.

Exemplo 3.3.2

Sejam

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ e } x^2 < 2\} \text{ e } Y = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}.$$

O conjunto X não é vazio ($1 \in X$) e é limitado superiormente por qualquer elemento de Y. Afirmamos que X não tem supremo em $\mathbb{Q}$. Mostremos, inicialmente, que dado um elemento de X sempre existe um outro elemento maior que está em X. Seja $x \in X$ e considere $x + \epsilon$ com o número racional positivo ϵ escolhido de tal modo que

$$(x+\epsilon)^2 = x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 < 2.$$

Precisamos provar que existe ϵ tal que esta última desigualdade é satisfeita. Para evitar a tarefa de resolver uma inequação quadrática para ϵ, suponha $\epsilon < 1$, que permite escrever

$$(x+\epsilon)^2 = x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 < x^2 + 2x\epsilon + \epsilon = x^2 + (2x+1)\epsilon.$$

Se ϵ for tal que $x^2 + (2x+1)\epsilon < 2$ teremos o objetivo alcançado. A escolha

$$\epsilon < \min\left\{1, \frac{2-x^2}{2x+1}\right\}$$

dá conta do recado:

$$(x+\epsilon)^2 < x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 < x^2 + (2x+1)\epsilon < x^2 + (2x+1)\frac{2-x^2}{2x+1} = 2.$$

Conclusão: X não tem um elemento máximo. Analogamente, dado $y \in Y$ podemos encontrar um elemento $y - \epsilon$ de Y tal que

$$(y-\epsilon)^2 = y^2 - 2y\epsilon + \epsilon^2 > y^2 - 2y\epsilon > 2,$$

bastando para isto escolher

$$\epsilon < \frac{y^2-2}{2y}.$$

Resta confirmar que $y - \epsilon > 0$, o que de fato se verifica:

$$y - \epsilon > y - \frac{y^2-2}{2y} = \frac{2y^2 - y^2 + 2}{2y} = \frac{y^2+2}{2y} > 0.$$

Conclusão: Y não tem um elemento mínimo. Como $x^2 \neq 2$ para todo racional x, se $\sup X$ existisse em $\mathbb{Q}$ não poderia estar em X porque X não tem máximo. Mas também não poderia estar em Y porque o supremo de X teria que ser o menor dos elementos de Y, mas Y não tem mínimo. Portanto, X não tem supremo em $\mathbb{Q}$.

Definição 3.12 *Um corpo ordenado K é dito* ***completo*** *se todo subconjunto não vazio de K que é limitado superiormente tem um supremo em K.*

De acordo com esta definição, o conjunto dos números reais é um **corpo ordenado completo**. O axioma de completeza poderia ser expresso de forma equivalente em termos do ínfimo.

Teorema 3.13 *Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que é limitado inferiormente tem um ínfimo.*

Demonstração. Se $X \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado inferiormente, considere o conjunto $-X$ definido por

$$-X = \{-x \mid x \in X\}.$$

Mostremos que $\inf(X) = -\sup(-X)$. Seja a uma cota inferior de x. Para todo $x \in X$ tem-se $x \geq a$ que implica $-x \leq -a$, de modo que $-a$ é cota superior de $-X$. Como $-X$ não é vazio, existe $-c = \sup(-X)$. Desejamos provar

que $c = \inf X$, o que pode ser conseguido com os argumentos simples que se seguem. (a) De $-x \leq \sup(-X) = -c$ deduz-se $x \geq c$ para todo $x \in X$, de modo que c é cota inferior de X. (b) Se $\tilde{c}$ é cota inferior de X então, para todo $x \in X$, $x \geq \tilde{c}$ que implica $-x \leq -\tilde{c}$ para todo $-x \in (-X)$. Como nenhuma cota superior de $-X$ pode ser menor que $\sup(-X)$, segue-se que $-\tilde{c} \geq -c$. Logo, $\tilde{c} \leq c$ e fica estabelecido que nenhuma cota inferior de X pode ser maior do que c. Em suma, c é a maior das cotas inferiores de X. ∎

Há uma outra propriedade simples do supremo que merece ser destacada por causa de suas muitas aplicações.

Teorema 3.14 *Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, ambos limitados superiormente. Seja $A+B$ o conjunto definido por*

$$A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}. \tag{3.4}$$

Então

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B. \tag{3.5}$$

Demonstração. Para simplificar a notação, sejam $a = \sup A$ e $b = \sup B$. Da definição de supremo temos $x \leq a$ para todo $x \in A$ e $y \leq b$ para todo $y \in B$. Portanto, $x + y \leq a + b$ para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$, de modo que $a + b$ é uma cota superior de $A+B$. Basta provar que esta cota superior é mínima, isto é, que dado $\epsilon > 0$ existe $z \in A+B$ tal que $z > a + b - \epsilon$. Mas isto é imediato porque existem $x_0 \in A$ tal que $x_0 > a - \epsilon/2$ e $y_0 \in B$ tal que $y_0 > a - \epsilon/2$, donde $z = x_0 + y_0 > a + b - \epsilon$. ∎

Exercício 3.3.1
Prove que

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B \tag{3.6}$$

se A e Y são subconjuntos de $\mathbb{R}$ não vazios e limitados inferiormente.

3.4 *Algumas Consequências do Axioma do Supremo*

O axioma do supremo permite demonstrar rigorosamente algumas propriedades intuitivamente óbvias dos números naturais.

Teorema 3.15 *O conjunto dos números naturais não é limitado superiormente.*
Demonstração. Suponha que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente. Como $\mathbb{N}$ não é vazio, tem um supremo α. Portanto,

$$n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Pela definição de supremo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > \alpha - 1,$$

donde

$$k + 1 > \alpha.$$

Como $k + 1 \in \mathbb{N}$, isto contradiz (3.7). Logo, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. ∎

Corolário 3.16 (Propriedade Arquimediana dos Números Reais) *Se a e b são números reais positivos, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.*

Corolário 3.17 *Para todo número real $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon$.*

Surpreendentemente, nem todo corpo ordenado goza da propriedade arquimediana. O conjunto $\mathbb{Q}(t)$ das funções racionais $r(t) = p(t)/q(t)$, onde p e q são polinômios em t com coeficientes racionais e q não identicamente nulo, forma um corpo. É possível ordenar este corpo de tal maneira que nele o conjunto $\mathbb{N}$ é limitado superiormente (Lima 2004, p. 74). Segue-se que $\mathbb{Q}(t)$ não é um corpo ordenado completo, pois o axioma do supremo assegura que todo corpo ordenado completo é arquimediano.

Os números racionais formam um conjunto enumerável **denso** em $\mathbb{R}$, isto é, existe um número racional arbitrariamente próximo de qualquer número real. Isto também é consequência da propriedade arquimediana dos números reais, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 3.18 *Entre quaisquer dois números reais existe um número racional.*
Demonstração. Consideremos primeiro o caso em que x e y são números positivos: $0 < x < y$. A ideia é multiplicar x e y por um número natural n a fim de "esticar" a diferença $y - x$ de modo a tornar $ny - nx$ maior que 1, o que força o "aparecimento" de um número natural entre nx e ny. Isto é sempre possível porque, pelo Corolário 3.17, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < y - x.$$

Além disso, pela propriedade arquimediana existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > nx. \tag{3.8}$$

Pelo Princípio da Boa Ordenação (Teorema 1.19), o conjunto dos números naturais maiores do que nx tem um mínimo, que continuaremos denotando por m. Segue-se que

$$m - 1 \leq nx,$$

caso contrário $m-1$ seria menor do que o mínimo. Somando as desigualdades

$$\frac{m-1}{n} \leq x \quad \text{e} \quad \frac{1}{n} < y - x$$

resulta

$$\frac{m}{n} < y.$$

Combinando este resultado com (3.8) resulta, finalmente,

$$x < \frac{m}{n} < y,$$

como se queria demonstrar. Se $y > x$ mas não tivermos $0 < x < y$ podemos reduzir a situação a este caso simplesmente considerando os números $x + k$ e $y + k$ com $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que se tenha $x + k > 0$. ∎

Corolário 3.19 *Entre dois números reais existe um número irracional.*

Exercício 3.4.1

Prove o Corolário 3.19. Sugestão: $\sqrt{2}/n$ é um número irracional que pode ser tornado arbitrariamente pequeno tomando $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

O axioma do supremo é essencial para a demonstração de muitos dos teoremas fundamentais da análise. Como primeira ilustração importante, mostremos que a mesma construção do Exemplo 3.3.2 pode ser usada para provar a existência de raízes enésimas.

Teorema 3.20 *Se a é um número real positivo e $n > 1$ é um número natural, existe uma única solução positiva para*

$$x^n = a,$$

denotada por $\sqrt[n]{a}$ *ou* $a^{1/n}$.

Demonstração. Unicidade. Da identidade

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \qquad 3.9$$

decorre imediatamente que se x e y são positivos e $x^n = y^n$ então $x = y$.
Existência. Seja

$$X = \{x > 0 \mid x^n < a\}.$$

(i) O conjunto X não é vazio e é limitado superiormente, pois $\alpha = a/(a+1) \in X$ e $\beta = a+1$ é uma cota superior de X. Para provar estas duas afirmações, note que, como $0 < \alpha < 1$, temos $0 < \alpha^n < \alpha < a$, de modo que $\alpha \in X$. Por outro lado, temos $\beta^n > \beta > a$ porque $\beta > 1$. Pela identidade (3.9), se x é positivo e $x > \beta$ então $x^n > \beta^n > a$, de modo que $x \notin X$. Portanto, $x \leq \beta$ para todo $x \in X$. (iii) Como X é não vazio e limitado superiormente, tem um supremo $c = \sup X$. Há três possibilidades, a saber: (a) $c^n < a$; (b) $c^n > a$; (c) $c^n = a$.

Se $c^n < a$ consideremos $c + \epsilon$ e tentemos determinar $\epsilon < 1$ de modo que $(c+\epsilon)^n < a$. Pelo teorema binomial,

$$(c+\epsilon)^n = c^n + nc^{n-1}\epsilon + \binom{n}{2} c^{n-2}\epsilon^2 + \ldots + nc\epsilon^{n-1} + \epsilon^n.$$

De $\epsilon < 1$ resulta $\epsilon^k < \epsilon$ para $k = 2,3,\ldots$ e temos

$$(c+\epsilon)^n < c^n + \epsilon\left[nc^{n-1} + \binom{n}{2} c^{n-2} + \ldots + nc + 1\right] = c^n + \epsilon\left[(1+c)^n - c^n\right] < a$$

desde que

$$\epsilon < \min\left\{1, \frac{a - c^n}{(1+c)^n - c^n}\right\}.$$

Portanto, $c + \epsilon \in X$ e $c + \epsilon > \sup X$, o que é uma contradição.

Se $c^n > a$ queremos encontrar $\epsilon > 0$ tal que $(c-\epsilon)^n > a$. O teorema binomial fornece

$$(c-\epsilon)^n = c^n - nc^{n-1}\epsilon + \binom{n}{2} c^{n-2}\epsilon^2 - \ldots + (-1)^{n-1} nc\epsilon^{n-1} + (-1)^n \epsilon^n .$$

Fazendo uma majoração trocando todos os termos positivos por quantidades negativas, teremos

$$(c-\epsilon)^n > c^n - nc^{n-1}\epsilon - \binom{n}{2} c^{n-2}\epsilon - \ldots - nc\epsilon - \epsilon = c^n - \epsilon[(1+c)^n - c^n] > a$$

desde que

$$\epsilon < \frac{c^n - a}{(1+c)^n - c^n} .$$

É fácil verificar que $y = c - \epsilon > 0$. Segue-se que para todo $x \in X$ temos $x^n < a < y^n$ com x e y positivos, o que implica $x < y$ em virtude da identidade (3.9). Portanto, y é cota superior de X menor do que o seu supremo, o que é impossível. Portanto, vale a terceira hipótese e $c^n = a$. ∎

3.5 *Unicidade dos Números Reais*

A noção de **isomorfismo** é muito importante na Matemática, e busca capturar a ideia de equivalência entre diferentes representações concretas de uma mesma estrutura abstrata.

Definição 3.21 *Dois corpos K e K' são ditos **isomorfos** se existe uma bijeção $f : K \to K'$ tal que, para todos os $x, y \in K$,*

$$f(x+y) = f(x) \oplus f(y) \quad \text{e} \quad f(xy) = f(x) \otimes f(y) ,$$

onde $\oplus$ e $\otimes$ denotam, respectivamente, as operações de adição e multiplicação em K'. Se os corpos são ordenados exige-se, ainda, que f satisfaça

$$x < y \implies f(x) \prec f(y) ,$$

onde $\prec$ denota a relação de ordem em K'.

Um isomorfismo entre corpos ordenados é uma renomeação dos elementos do corpo que preserva a adição, a multiplicação e a ordem. É de se esperar que corpos ordenados isomorfos possam ser considerados equivalentes,

já que qualquer resultado válido num deles pode ser transcrito em termos dos elementos do outro. Um resultado importante assegura que, salvo por isomorfismos, os números reais constituem o único corpo ordenado completo.

Teorema 3.22 *Todo corpo ordenado completo é isomorfo a* $\mathbb{R}$.

A demonstração, que não é difícil de acompanhar mas é bastante longa, pode ser encontrada em Spivak (1994, cap. 30).

3.6 *Números Complexos*

Os números complexos são extremamente importantes tanto para a Matemática quanto para a Física. O teorema fundamental da álgebra garante que qualquer polinômio de grau n com coeficientes complexos tem exatamente n raízes complexas (contando a multiplicidade de cada raiz). Por sua vez, tanto a equação de Schrödinger quanto as relações de comutação fundamentais da mecânica quântica dependem de modo essencial dos números complexos. Os números complexos costumam ser definidos axiomaticamente como pares ordenados de números reais.

Definição 3.23 *O **corpo dos números complexos*** $\mathbb{C}$ *é o conjunto* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *munido das operações de adição e multiplicação assim definidas:*

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\,;$$
$$(a,b)\,(c,d)=(ac-bd,ad+bc)\,.$$

É fácil verificar que $\mathbb{C}$ é um corpo cujo elemento neutro da adição (o zero) é $(0,0)$ e cujo elemento neutro da multiplicação (o um) é $(1,0)$. Seja $\mathbb{S}$ o subcorpo de $\mathbb{C}$ definido por

$$\mathbb{S}=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}\,.$$

Comprova-se facilmente que a aplicação $f:\mathbb{R}\to\mathbb{S}$ definida por

$$f(x)=(x,0)$$

é um isomorfismo. Assim, podemos identificar $\mathbb{S}$ e $\mathbb{R}$, o que permite considerar o corpo dos números reais como um subcorpo do corpo dos números complexos.

Definindo $i = (0,1)$ resulta imediatamente que

$$i^2 = (0,1)\,(0,1) = (-1,0) = -1$$

em virtude da identificacão de $(x,0)$ com x. Resulta que $\mathbb{C}$ não é um corpo ordenado porque num corpo ordenado -1 é negativo e o quadrado de qualquer elemento é positivo. Com a identificação de $\mathbb{S}$ e $\mathbb{R}$ podemos escrever

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)\,(0,1) = a + bi\,,$$

que é a forma tradicional de expressar um número complexo. Dado um número complexo $z = a + bi$ dizemos que a é sua **parte real** e b é sua **parte imaginária**, e escrevemos $a = \operatorname{Re} z$ e $b = \operatorname{Im} z$. O número complexo $\bar{z} = a - bi$ é o **conjugado** de $z = a + bi$.

Deve-se a Hamilton esta definição axiomática dos números complexos, que os desmistificou de forma definitiva (Eves 1990b).

Embora $\mathbb{C}$ não seja um corpo ordenado, pode-se definir um valor absoluto em $\mathbb{C}$ cujas propriedades básicas são as mesmas do valor absoluto em $\mathbb{R}$.

Definição 3.24 *O **valor absoluto** ou **módulo** $|z|$ do número complexo $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$ é definido por*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Teorema 3.25 *O valor absoluto em $\mathbb{C}$ tem as seguintes propriedades:*

(i) $|z| > 0$ *e* $|z| = 0$ *se e somente se* $z = 0$;

(ii) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ e $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$;

(iii) $|z|^2 = z\,\bar{z}$;

(iv) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$;

(v) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Demonstração. Provaremos apenas (v). Note que $\bar{z}_1 z_2$ é o conjugado de $z_1 \bar{z}_2$, donde $\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 z_2)$. Portanto, com o uso de (ii) e (iv), temos

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 z_2) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2| = (|z_1| + |z_1|)^2 \end{aligned}$$

e (v) resulta por extração da raiz quadrada. ∎

Exercício 3.6.1

Prove os itens (i) a (iv) do Teorema 3.25. Prove que qualquer número complexo pode z ser escrito na forma polar $z = re^{i\theta}$, onde $r = |z|$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Lembre-se de que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Leituras Adicionais Selecionadas[3]

Apostol, T. M. 1974 *Mathematical Analysis.*

Ávila, G. 1999 *Introdução à Análise Matemática.*

Courant, R. e John, F. 1999 *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. I.

Figueiredo, D. G. 1996 *Análise I.*

• Johnsonbaugh, R. e Pfaffenberger, W. E. 2002 *Foundations of Mathematical Analysis.*

• Lima, E. L. 2004 *Curso de Análise*, Vol. 1.

• Spivak, M. 1994 *Calculus.*

Problemas

3.1. Sejam $a,b,c,d > 0$ com $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Prove que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Discuta o significado intuitivo deste resultado considerando um campeonato de futebol em que a média de gols do primeiro turno foi inferior à do segundo.

3.2. Se $a > 0$ e $b \geq a$, prove que $\sqrt{b} \geq \sqrt{a}$.

3.3. Se $a,b > 0$, prove que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

3.4. Dados dois números reais a e b, prove que

$$\epsilon a^2 + \epsilon^{-1} b^2 \geq 2|a||b| \quad \forall \epsilon > 0.$$

3. A lista completa de referências, com plenos detalhes bibliográficos, encontra-se na Bibliografia no fim do livro. O símbolo • destaca obras cuja leitura é altamente recomendada.

3.5. Se x e y são números complexos, prove que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

3.6. Prove que $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \geq |z_1| - |z_2| - \ldots - |z_n|$ para todos os números complexos $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

3.7. Sejam x e y números reais positivos. Prove que:
(a) $x < y \iff x^{-1} > y^{-1}$; (b) $x > 0 \iff x^{-1} > 0$; (c) $x^n < y^n \iff x < y$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.8. A média geométrica de dois números reais positivos x e y é $\sqrt{xy}$, ao passo que sua média aritmética é $(x + y)/2$. Prove que a média geométrica nunca é maior do que a média aritmética: $\sqrt{xy} \leq (x + y)/2$. Em que condições essas médias são iguais?

3.9. A média harmônica de dois números reais positivos x e y é o número h definido por $h^{-1} = (x^{-1} + y^{-1})/2$. Mostre que a média harmônica nunca é maior do que a média geométrica. Em que condições essas médias são iguais?

3.10. Sejam A e B conjuntos não vazios e limitados de números reais. Prove que se $A \subset B$ então $\inf A \geq \inf B$ e $\sup A \leq \sup B$.

3.11. Sejam X e Y conjuntos não vazios de números reais limitados superiormente. Seja XY o conjunto de todos os produtos de elementos de X e Y, isto é, $XY = \{xy \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$. (a) O conjunto XY é limitado superiormente? (b) Encontre condições suficientes para que se tenha $\sup(XY) = (\sup X)(\sup Y)$.

3.12. Sejam X e Y conjuntos não vazios de números reais. Defina o conjunto $X - Y$ por $X - Y = \{x - y \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$. Se X e Y são limitados, prove que

$$\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y$$

e

$$\inf(X - Y) = \inf X - \sup Y.$$

3.13. Seja X um conjunto não vazio e limitado de números reais. Dados os números reais a e b, seja $Y = \{ax + b \mid x \in X\}$. Conjecture fórmulas para $\sup Y$ e $\inf Y$ em termos de $\sup X$ e $\inf X$. Demonstre suas fórmulas.

3.14. Seja X um conjunto de números reais positivos com $\inf X > 0$ e defina

$$X^{-1} = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in X \right\}.$$

Prove que

$$\sup X^{-1} = \frac{1}{\inf X}.$$

3.15. Sejam A e B conjuntos não vazios de números reais tais que $a \leq b$ sempre que $a \in A$ e $b \in B$. Prove que $\sup A \leq \inf B$. Prove, ainda, que $\sup A = \inf B$ se e somente se, para qualquer $\epsilon > 0$, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $b - a < \epsilon$.

3.16. Considere a coleção de intervalos $I_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Determine

(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$; (b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$; (c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^c$; (d) $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n^c$.

3.17. Às vezes é conveniente atribuir um supremo e um ínfimo ao conjunto vazio. Neste caso, as convenções adotadas são

$$\sup \varnothing = -\infty \quad \text{e} \quad \inf \varnothing = \infty.$$

Justifique estas definições.

4

Sequências e Séries Numéricas

A essência da análise matemática reside na noção de limite. Por mais de um século, desde a invenção (descoberta?) do Cálculo por Newton e Leibnitz, a noção de limite esteve envolta em obscuridade, confusão e controvérsia (Boyer 1949; Edwards, Jr. 1982). Cauchy foi o primeiro a fundamentar as noções de continuidade e difenciabilidade numa teoria de limites. A moderna definição puramente aritmética de limite, livre tanto da necessidade de representação geométrica quanto da ideia física de movimento, deve-se a Weierstrass. Comecemos com o estudo de limites de sequências numéricas.

4.1 *Limite de uma Sequência*

Informalmente, uma sequência é uma lista de elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de algum conjunto A. A definição precisa é dada a seguir.

Definição 4.1 *Dado um conjunto A, uma* ***sequência*** *ou* ***sucessão*** *de elementos de A é uma aplicação do conjunto dos números naturais em A.*

Estaremos interessados especialmente em sequências de números reais (sequências reais), caso em que em que o conjunto A é $\mathbb{R}$. Também consideraremos sequências complexas, caso em que o conjunto A é $\mathbb{C}$. Usaremos a notação (a_n) para denotar uma sequência, onde a representa a aplicação e $a_n = a(n)$ é o seu valor em $n \in \mathbb{N}$. Outras notações são $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_1, a_2, \ldots)$ ou, ainda, $\{a_n\}$. O número a_n é chamado de enésimo termo da sequência. A sequência não deve ser confundida com o conjunto de seus elementos. A aplicação a pode não ser injetiva, de modo que os elementos $a_1, a_2, \ldots$ não precisam ser distintos. Toda sequência é infinita, mas o conjunto

dos elementos da sequência pode ser finito. No caso extremo da sequência constante $(a,a,a,a,\ldots)$ o conjunto de seus elementos é $\{a\}$, formado pelo único elemento a.

Exemplo 4.1.1
Sequências podem ser definidas por fórmulas tais como

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n = 1,2,\ldots$$

ou recursivamente, como

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0, \quad b_{n+2} = b_{n+1} + \frac{(b_{n+1} - b_n)^2}{2}, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Se a partir de um certo valor de n suficientemente grande os elementos de uma sequência tornam-se e permanecem arbitrariamente próximos de algum número, dizemos que a sequência tem um limite.

Definição 4.2 *Seja (a_n) uma sequência de números reais (complexos). O número real (complexo) a é **limite** da sequência (a_n) se para cada $\epsilon > 0$ existe um número natural N tal que*

$$|a_n - a| < \epsilon$$

para todo $n > N$.

Em linguagem simbólica: a é limite da sequência (a_n) se e somente se

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Longrightarrow |a_n - a| < \epsilon).$$

Uma sequência que tem limite é dita **convergente**, e diz-se que ela **converge** para o seu limite. Uma sequência que não tem limite é dita **divergente**. No caso de uma sequência de números reais, para provar que a é o limite da sequência devemos mostrar que, por menor que seja o número positivo ϵ, existe um número natural N a partir do qual todos os elementos da sequência pertencem ao intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ da reta real. Além de $a_n \to a$, usaremos as duas notações abaixo para indicar que (a_n) converge para a:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim a_n = a.$$

Salvo menção em contrário, no presente capítulo a palavra "sequência" sempre se referirá a uma sequência de números reais.

A fim de poder aplicar a definição de limite é precisar dispor de algum candidato ao limite. No caso da sequência $a_n = n/(n+1)$ do Exemplo 4.1.1, o suspeito óbvio é o número 1, já que para n muito grande o numerador e o denominador tornam-se praticamente iguais. Para provar a suspeita, note que dado $\epsilon > 0$ teremos

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon$$

desde que $n > 1/\epsilon - 1$. Portanto, se $N > 1/\epsilon - 1$ teremos $|a_n - 1| < \epsilon$ para todo $n > N$, o que prova que a sequência $n/(n+1)$ converge para 1.

A definição de limite atende aos reclamos de nossa intuição, pois não permite que uma sequência convirja para dois limites diferentes.

Teorema 4.3 *Uma sequência tem no máximo um limite.*

Demonstração. Suponha que uma sequência (a_n) tenha dois limites a e $\tilde{a}$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \epsilon$ para todo $n > N_1$. Da mesma forma, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \tilde{a}| < \epsilon$ para todo $n > N_2$. Portanto, se $N = \max\{N_1, N_2\}$ e $n > N$ temos

$$|\tilde{a} - a| = |a_n - a + \tilde{a} - a_n| \leq |a_n - a| + |a_n - \tilde{a}| < 2\epsilon.$$

Isto só pode valer para todo $\epsilon > 0$ se $\tilde{a} = a$, pois se $|\tilde{a} - a| > 0$ basta escolher $\epsilon = |\tilde{a} - a|/2$ para que a desigualdade seja violada. ∎

Exercício 4.1.1
(i) Prove que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ se e somente se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. (ii) Prove que se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ então $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. A recíproca é verdadeira?

Definição 4.4 *Uma sequência (a_n) é* ***limitada superiormente*** *se existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência é* ***limitada inferiormente*** *se existe $M_2 \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq M_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência é* ***limitada*** *se e somente se é limitada inferiormente e superiormente.*

Tomando $M = \max\{|M_1|, |M_2|\}$ vê-se que uma sequência é **limitada** se e somente se existe um número positivo M tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.1.2
A sequência $a_n = n - 4/n$ é limitada inferiormente ($a_n \geq -3$) mas não é limitada superiormente.

Teorema 4.5 *Toda sequência convergente é limitada.*
Demonstração. Suponha que $\lim a_n = a$. Se $\epsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < 1$ para $n > N$. Portanto,

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \qquad \forall n > N$$

e a escolha $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, 1 + |a|\}$ assegura que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

A recíproca deste teorema não é verdadeira. Por exemplo, a sequência $a_n = (-1)^n$ é limitada ($|a_n| \leq 1$) mas não é convergente.

Exemplo 4.1.3
Considere a sequência (a^n).
Caso (i): $0 < |a| < 1$. Suponhamos primeiro $0 < a < 1$. Podemos escrever

$$a = \frac{1}{1+r} \text{ onde } r = \frac{1}{a} - 1 > 0.$$

Seja dado $\epsilon > 0$. A desigualdade de Bernoulli $(1+r)^n \geq 1 + nr$ permite escrever

$$0 < a^n = \frac{1}{(1+r)^n} \leq \frac{1}{1+nr} < \frac{1}{nr} < \epsilon$$

desde que $n > 1/r\epsilon$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \text{ se } 0 < a < 1.$$

Se $-1 < a < 0$ os termos da sequência alternam de sinal mas o limite continua sendo zero. Outro modo de chegar a esta conclusão é com o emprego da parte (i) do Exercício 4.1.1.

Caso (ii): $|a| > 1$. Suponhamos primeiro $a > 1$. Neste caso escrevemos $a = 1 + r$ com $r > 0$ e a desigualdade de Bernoulli fornece

$$a^n = (1+r)^n \geq 1 + nr,$$

que prova que a sequência (a^n) não é limitada e, portanto, é divergente. Se $a < -1$ pomos $a = -b$ com $b > 1$ e os termos pares crescem indefinidamente, de modo que a sequência original não pode convergir.
Caso (iii): $a = 0$ ou $a = 1$ ou $a = -1$. Se $a = 0$ ou $a = 1$ a sequência é constante e converge trivialmente para 0 ou 1, respectivamente. Se $a = -1$ a sequência é divergente porque seus elementos são alternadamente iguais a 1 e -1.

Exemplo 4.1.4
Considere a sequência $(\sqrt[n]{n})$. Para estudar sua convergência precisaremos da desigualdade

$$(1+r)^n \geq 1 + nr + \frac{n(n-1)}{2} r^2, \quad r \geq 0,$$

que é válida para todo número natural n (você está convidado a prová-la por indução). Pondo

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n, \quad h_n \geq 0$$

resulta

$$n = (1+h_n)^n \geq 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$$

donde

$$0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Para cada $\epsilon > 0$ basta tomar $N > 1 + 2/\epsilon^2$ para se ter $|h_n| < \epsilon$ para todo $n > N$. Segue-se que $h_n \to 0$ e, em consequência,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

4.2 *Propriedades dos Limites*

O cálculo do limite de uma sequência é facilitado pelo uso de suas propriedades algébricas.

Teorema 4.6 *Se (a_n) converge para zero e (b_n) é limitada então $(a_n b_n)$ converge para zero.*

Demonstração. Seja $M > 0$ tal que $|b_n| \leq M$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \epsilon / M$ se $n > N$. Portanto, para todo $n > N$ temos

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

e a demonstração está concluída. ∎

Teorema 4.7 *Se* $\lim a_n = a$ *e* $\lim b_n = b$ *então:*

(i) $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b;$

(ii) $\lim(ca_n) = c \lim a_n = ca \ \forall c \in \mathbb{R};$

(iii) $\lim(a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n) = ab;$

(iv) $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}$ se $b \neq 0$.

Demonstração. (i) Dado $\epsilon > 0$ existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_n - a| < \epsilon/2$ se $n > N_1$ e $|b_n - b| < \epsilon/2$ se $n > N_2$. Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Então, se $n > N$ temos

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

e isto prova (i). (ii) Como o caso $c = 0$ é trivial, suponhamos $c \neq 0$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{|c|}$ se $n > N$. Portanto, se $n > N$ temos

$$|ca_n - ca| = |c(a_n - a)| = |c||a_n - a| < |c|\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon,$$

e isto prova (ii). (iii) Por serem convergentes, (a_n) e (b_n) são ambas limitadas. Usando a identidade $a_n b_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$, os itens (i) e (ii) e o Teorema 4.6 temos

$$\lim(a_n b_n - ab) = \lim(a_n - a)b_n + \lim a(b_n - b) = 0,$$

de modo que $\lim a_n b_n = ab$. (iv) Por causa de (iii), basta provar que $\lim(1/b_n) = 1/b$. Como $b \neq 0$, segue-se que $b_n = 0$ apenas para um número

finito de índices e $1/b_n$ está definido a partir de um certo número natural n. Associado ao número positivo $|b|/2$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N_1$, $|b_n - b| < |b|/2$. Portanto, se $n > N_1$,

$$|b| = |b - b_n + b_n| \leq |b_n - b| + |b_n| < \frac{|b|}{2} + |b_n| \Longrightarrow |b_n| > \frac{|b|}{2}.$$

Dado $\epsilon > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - b| < |b|^2\epsilon/2$ para todo $n > N_2$. Consequentemente, se $n > \max\{N_1, N_2\}$ temos

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b|\,|b_n|} < \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| < \frac{2}{|b|^2}\frac{|b|^2}{2}\epsilon = \epsilon$$

e a prova está completa. ∎

Exemplo 4.2.1
Temos

$$\lim \frac{3n^2 + n - 1}{2n^2 - 5} = \lim \frac{(3n^2 + n - 1)/n^2}{(2n^2 - 5)/n^2} = \lim \frac{3 + 1/n - 1/n^2}{2 - 5/n^2}$$
$$= \frac{3 + \lim 1/n - \lim 1/n^2}{2 - 5 \lim 1/n^2} = \frac{3 + 0 - 0}{2 - 5 \times 0} = \frac{3}{2},$$

onde usamos (i), (ii) e (iv) do Teorema 4.7.

Definição 4.8 *Uma sequência (a_n) é **crescente** se $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência é **decrescente** se $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência é **monótona** se é crescente ou decrescente. Se $a_{n+1} > a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ a sequência é dita **estritamente crescente (estritamente decrescente)**.*

Teorema 4.9 *Toda sequência crescente e limitada superiormente tem limite. Toda sequência decrescente e limitada inferiormente tem limite.*

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência crescente e limitada superiormente. O conjunto de seus elementos $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que é limitado superiormente, logo tem um supremo a. Por definição de supremo, dado $\epsilon > 0$ existe um elemento da sequência a_N tal que $a_N > a - \epsilon$. Portanto, como a sequência é crescente,

$$a - \epsilon < a_N < a_{N+1} < a_{N+2} < a_{N+3} < \ldots \leq a < a + \epsilon.$$

Portanto, $|a_n - a| < \epsilon$ para todo $n > N$, o que prova que a sequência converge para o seu supremo. Analogamente, prova-se que toda sequência decrescente e limitada inferiormente converge para o seu ínfimo. ▮

Historicamente, foi a insatisfação de Richard Dedekind com a necessidade de recorrer a evidências geométricas a fim de estabelecer este último teorema que o levou à primeira construção rigorosa dos números reais (Dedekind 1963).

Exemplo 4.2.2
Considere a sequência (a_n) definida por $a_1 > 1$ e

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}.$$

Para iniciar a investigação da convergência desta sequência, note que de $a_1 > 1$ deduz-se $-1/a_1 > -1$, donde $a_2 > 1$. Segue-se por indução que $a_n > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que a sequência (a_n) é limitada inferiormente. Se conseguirmos mostrar que (a_n) é monótona decrescente estará estabelecida a sua convergência. De

$$a_{n+1} - a_n = 2 - \frac{1}{a_n} - a_n = \frac{2a_n - 1 - a_n^2}{a_n} = -\frac{(a_n - 1)^2}{a_n} < 0$$

decorre que de fato (a_n) é monótona decrescente. Seja $x = \lim a_n$. Podemos escrever

$$x = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{x} \Longrightarrow (x-1)^2 = 0.$$

Portanto, $\lim a_n = 1$.

Exemplo 4.2.3
A constante de Euler ou Euler-Mascheroni γ. Considere a sequência (a_n) definida por

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

Esta sequência é monótona crescente:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+2}{n+1} > 0$$

porque

$$\ln\frac{n+2}{n+1} = \int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x} < \int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

onde usamos $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{x} < \frac{1}{n+1}$ sempre que $n+1 < x < n+2$. Por outro lado, somando as desigualdades

$$\frac{1}{k+1} = \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{k+1} < \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x} = \ln\frac{k+1}{k}$$

desde $k = 1$ até $k = n$ resulta

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1),$$

ou seja,

$$a_n - 1 + \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) \implies a_n < 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

Portanto, (a_n) converge porque é monótona crescente e limitada superiormente, o que permite definir

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\right] = 0{,}5772156649\ldots.$$

A constante γ aparece, por exemplo, numa expansão em série de Laurent da função zeta de Riemann e na expansão da função gama como um produto infinito (Ahlfors 1981; Lins Neto 1996). Não se sabe se γ é racional ou irracional.

Exercício 4.2.1

Sejam (a_n) e (b_n) sequências convergentes tais que $a_n \le b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que $\lim a_n \le \lim b_n$. Se $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pode-se concluir que $\lim a_n < \lim b_n$?

Teorema 4.10 (Teorema do Confronto) *Se as sequências (a_n) e (c_n) convergem para o mesmo limite L e $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então (b_n) também converge para L.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$, se $n > N_1$, e $L - \epsilon < c_n < L + \epsilon$, se $n > N_2$. Portanto, se $n > \max\{N_1, N_2\}$ temos

$$L - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \epsilon \Longrightarrow |b_n - L| < \epsilon$$

e a demonstração está completa. ∎

Por motivos óbvios, o teorema do confronto também é conhecido informalmente como *teorema do sanduíche*. Na verdade, se (a_n) e (c_n) convergem para o mesmo limite, basta que exista $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n > N$ para que a conclusão do Teorema 4.10 permaneça válida.

Exemplo 4.2.4

A sequência $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ satisfaz

$$0 < a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Como $\lim 1/2\sqrt{n} = 0$, segue-se do teorema do confronto que $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

Exercício 4.2.2

O Teorema 4.10 pode ser considerado uma consequência imediata do Exercício 4.2.1?

4.3 *Subsequências e Teorema de Bolzano-Weierstrass*

Dada uma sequência

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots$$

obtemos uma subsequência excluindo termos da lista acima para obter, por exemplo,

$$a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}, a_{14}, \ldots$$

em que todos os termos ímpares foram excluídos.

Definição 4.11 *Dada uma sequência* (a_n), *seja* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *uma função estritamente crescente, isto é,* $f(n+1) > f(n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *A sequência* $(a_{f(n)})$ *é dita uma* ***subsequência*** *de* (a_n).

Uma subsequência de (a_n) costuma ser denotada por $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ou simplesmente (a_{n_k}), onde $n_k = f(k)$ com $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Uma sequência divergente pode possuir subsequências convergentes.

Exemplo 4.3.1
A sequência (a_n) cujos termos são

$$1, 2, \frac{1}{3}, 4, 5, \frac{1}{6}, 7, 8, \frac{1}{9}, 10, \ldots$$

é divergente mas tem a subsequência convergente (a_{3k}) cujos termos são

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{3k}, \ldots$$

Neste caso $f(k) = 3k$ e a subsequência (a_{3k}) converge para zero.

Teorema 4.12 *Seja* (a_n) *uma sequência que converge para* a. *Então toda subsequência de* (a_n) *converge para* a.
Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \epsilon$ para todo $n > N$. Como $n_k \geq k$, resulta que se $k > N$ então $n_k > N$, que implica $|a_{n_k} - a| < \epsilon$. Isto mostra que (a_{n_k}) converge para a. ∎

O resultado a seguir tem muitas consequências importantes e depende da completeza dos números reais.

Teorema 4.13 (Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência limitada de números reais tem uma subsequência convergente.*
Demonstração. Seja (x_n) uma sequência limitada de números reais com a_0 e b_0 seus limites inferior e superior, respectivamente. Assim, todos os elementos da sequência pertencem ao intervalo fechado $I_0 = [a_0, b_0]$. Uma subsequência convergente pode ser extraída pelo engenhoso método de bissecção de Bolzano-Weierstrass. Primeiramente bisseccionamos I_0 nos dois intervalos fechados $[a_0, (a_0 + b_0)/2]$ e $[(a_0 + b_0)/2, b_0]$ de mesmo comprimento $(b_0 -$

$a_0)/2$. Um destes dois intervalos, que chamaremos de I_1, contém um número infinito dos elementos x_n, dos quais selecionamos um elemento x_{n_1}. Note que $I_1 = [a_1, b_1] \subset I_0$, de modo que $a_1 \geq a_0$ e $b_1 \leq b_0$. Em seguida bisseccionamos I_1 de modo a obter um intervalo $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$ cujo comprimento é $(b_0 - a_0)/2^2$ e que contém um número infinito dos elementos x_n, dos quais selecionamos um elemento x_{n_2} com $n_2 > n_1$. Prosseguindo desta maneira, obtemos uma sequência de intervalos encaixados $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ tal que cada intervalo $I_k = [a_k, b_k]$ contém x_{n_k} e

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}.$$

Como $I_{k+1} \subset I_k$ segue-se que $a_{k+1} \geq a_k$ e $b_{k+1} \leq b_k$. Portanto (a_k) é uma sequência monótona crescente e limitada superiormente por b_0, ao passo que (b_k) é uma sequência monótona decrescente e limitada inferiormente por a_0. De acordo com o Teorema 4.9 as sequências (a_k) e (b_k) são ambas convergentes, e convergem para o mesmo limite porque

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} a_k + \lim_{k\to\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^k} = \lim_{k\to\infty} a_k .$$

Como

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k ,$$

a subsequência (x_{n_k}) é convergente pelo teorema do confronto. ∎

Exemplo 4.3.2
A sequência limitada (a_n) cujos termos são

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$$

é tal que qualquer número em $[0,1]$ é limite de alguma de suas subsequências. Por exemplo, a subsequência

$$\frac{5}{10}, \frac{57}{100}, \frac{577}{1000}, \frac{5772}{10000}, \frac{57721}{100000}, \ldots$$

converge para a constante de Euler γ.

4.4 *Sequências de Cauchy*

De acordo com Definição 4.2, para demonstrar que uma sequência converge precisamos conhecer o seu limite ou dispor de um candidato a limite. No caso de sequências monótonas basta provar que elas são limitadas para a convergência ficar estabelecida, mas este critério não se aplica a sequências arbitrárias. O ideal é dispor de um teste de convergência que seja aplicável a qualquer sequência e que não dependa da posse de informações a respeito do limite, mas tão somente das propriedades intrínsecas da sequência. Existe um teste com estas características que se baseia no **critério de convergência de Cauchy**, que constitui-se numa condição necessária e suficiente para que uma sequência convirja.

O que caracteriza uma sequência de Cauchy (a_n) é a propriedade dos seus elementos de tornarem-se e permanecerem arbitrariamente próximos uns dos outros para n suficientemente grande.

Definição 4.14 *Uma sequência (a_n) é dita* ***sequência de Cauchy*** *se para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|a_m - a_n| < \epsilon$$

para todos os $m,n > N$.

Teorema 4.15 (Critério de Cauchy) *Uma sequência de números reais é convergente se e somente se é sequência de Cauchy.*

Demonstração. *Necessidade.* Seja (a_n) uma sequência convergente cujo limite é a. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \epsilon/2$ para todo $n > N$. Portanto, para todos os $m,n > N$,

$$|a_m - a_n| = |a_m - a - (a_n - a)| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

de modo que (a_n) é sequência de Cauchy.

Suficiência. Seja (a_n) uma sequência de Cauchy. Mostremos primeiro que (a_n) é limitada. Associado a $\epsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_m - a_n| < 1$ se $m,n > N$. Portanto, para todo $m > N$.

$$|a_m| = |a_{N+1} + (a_m - a_{N+1})| \leq |a_{N+1}| + |a_m - a_{N+1}| < |a_{N+1}| + 1.$$

Tomando $M = \max\{|a_1|,\ldots,|a_N|,|a_{N+1}|+1\}$ resulta que $|a_n| \le M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, estabelecendo que (a_n) é limitada. Pelo teorema de Bolzano--Weierstrass, (a_n) possui uma subsequência convergente (a_{n_k}). Resta provar que uma sequência de Cauchy converge sempre que possui uma subsequência convergente. Como (a_{n_k}) converge para um certo número a, dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n_k} - a| < \epsilon/2$ para todo $k > N_1$. Por outro lado, como (a_n) é sequência de Cauchy, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_{n_k}| < \epsilon/2$ para todos os $n, n_k > N_2$. Portanto, escolhendo $k > N_1$ tal que $n_k > N_2$ temos

$$\begin{aligned}|a_n - a| &= |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \\ &\le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

para todo $n > N_2$. Portanto, (a_n) converge para a. ∎

Corolário 4.16 *Uma sequência de números complexos é convergente se e somente se é sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja $(z_n) = \big((x_n, y_n)\big)$ uma sequência de Cauchy de números complexos. De

$$|x_m - x_n| \le |z_m - z_n| \quad \text{e} \quad |y_m - y_n| \le |z_m - z_n|$$

segue-se que (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy de números reais. Logo, (x_n) e (y_n) são convergentes com limites x e y, respectivamente. Para todo $\epsilon > 0$ existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que $|x_n - x| < \epsilon/\sqrt{2}$, se $n > N_1$, e $|y_n - y| < \epsilon/\sqrt{2}$ se $n > N_2$. Portanto, se $z = (x,y)$ e $n > \max\{N_1, N_2\}$,

$$|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon,$$

de modo que (z_n) converge para o número complexo z. A necessidade prova--se do mesmo modo que no caso real. ∎

Um conjunto dotado de uma noção de distância (métrica) entre os seus elementos e no qual toda sequência de Cauchy é convergente é chamado de espaço métrico completo. Os espaços métricos serão discutidos de forma geral no Capítulo 8.

4.5 *Limites Superior e Inferior*

Há dois limites generalizados, chamados de limite superior e limite inferior, que existem para sequências limitadas, mesmo que não sejam convergentes.

Se (a_n) é uma sequência limitada, seja

$$\overline{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}.$$

Como

$$\sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3} \ldots\} \leq \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\},$$

segue-se que a sequência $(\overline{a}_n)$ é monótona decrescente. Como $(\overline{a}_n)$ é limitada porque (a_n) é limitada, resulta que $(\overline{a}_n)$ é convergente. Analogamente,

$$\underline{a}_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$$

é uma sequência limitada e monótona crescente, logo convergente.

Definição 4.17 *Dada uma sequência limitada (a_n), seu* ***limite superior*** *é*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n$$

e seu ***limite inferior*** *é*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n.$$

Em vez de $\limsup\limits_{n\to\infty}$ e $\liminf\limits_{n\to\infty}$ escreveremos simplesmente $\limsup$ e $\liminf$. As notações $\overline{\lim}$ e $\underline{\lim}$ também são usadas em lugar de $\limsup$ e $\liminf$, respectivamente.

Exemplo 4.5.1
(i) Se $a_n = (-1)^n$ temos $\limsup a_n = 1$ e $\liminf a_n = -1$. (ii) Se

$$a_n = 2 + (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

temos $\limsup a_n = 3$ e $\liminf a_n = 1$.

Teorema 4.18 *Se* (a_n) *é uma sequência limitada então*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n$$

e a sequência é convergente se e somente se

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n .$$

Demonstração. A primeira parte resulta imediatamente de $\underline{a}_n \le \overline{a}_n$ e do Exercício 4.2.1. Suponha que $\limsup a_n = \liminf a_n = a$. Como $\underline{a}_n \le a_n \le \overline{a}_n$ segue-se que $\lim a_n = a$ pelo teorema do confronto. Reciprocamente, suponha que $\lim a_n = a$, de modo que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \implies a - \frac{\epsilon}{2} < a_n < a + \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $n > N$. Logo, se $n > N$, temos

$$a - \epsilon < a - \frac{\epsilon}{2} \le \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} \le a + \frac{\epsilon}{2} < a + \epsilon \implies |\overline{a}_n - a| < \epsilon ,$$

com resultado análogo para $\underline{a}_n$. Portanto, $\limsup a_n = \liminf a_n = a$. ∎

4.6 *Séries Numéricas*

A fim de dar sentido a uma soma infinita de números precisamos investigar as propriedades de convergência das séries numéricas.

Definição 4.19 *Seja* (a_n) *uma sequência. Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *seja*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Uma ***série numérica, série infinita*** *ou simplesmente* ***série*** *é um par ordenado de sequências* $\big((a_n),(s_n)\big)$.

Diz-se que a_n é o **termo geral** e que (s_n) é a **sequência das reduzidas** ou **das somas parciais** da série. As notações

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n , \quad \sum a_n \quad \text{e} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

serão usadas tanto para denotar a série quanto a soma da série, quando esta existe. Frequentemente consideraremos séries da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, cujo primeiro termo é a_0 em vez de a_1, ou $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$, cujo primeiro termo é a_p com $p \in \mathbb{N}$.

Definição 4.20 *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica. Se a sequência (s_n) de suas somas parciais converge para s, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$* ***converge para*** *s ou que a série* ***tem soma*** *s, e escrevemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Se a sequência de suas somas parciais diverge, dizemos que a série ***diverge*** *ou é* ***divergente****.*

Exemplo 4.6.1
Série geométrica. Seja

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots, \quad a \neq 0.$$

A enésima soma parcial

$$s_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$$

satisfaz

$$as_n = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n + a^{n+1} = s_n - 1 + a^{n+1},$$

donde

$$s_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad a \neq 1.$$

De acordo com o Exemplo 4.1.3, a sequência (a^n) converge para zero se $0 < |a| < 1$, de modo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1-a} \quad (0 < |a| < 1).$$

Para todos os demais valores de a a série geométrica é divergente.

Teorema 4.21 *Se uma série é convergente o seu termo geral tende a zero.*

Demonstração. Basta notar que $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$ ∎

A recíproca deste teorema não é verdadeira, e o contraexemplo clássico é a série harmônica.

Exemplo 4.6.2

A *série harmônica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

é divergente embora seu termo geral $1/n$ tenda a zero. Com efeito, considerando sua reduzida de ordem 2^n temos

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{2 \text{ termos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{2^2 \text{ termos}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1} \text{ termos}}$$

$$> 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n}}_{n \text{ termos}} = 1 + \frac{n}{2},$$

de modo que a série harmônica é divergente porque não é limitada. Esta análise teórica, realizada por Nicole Oresme no século XIV, é crucial porque a divergência da série harmônica jamais poderia ser descoberta experimentalmente. Imagine um computador poderosíssimo capaz de efetuar uma adição a cada intervalo de tempo de 10^{-22} s, que corresponde ao tempo gasto pela luz para atravessar um próton. Se esse computador estivesse somando os termos da série harmônica desde quando o Universo nasceu, há cerca de 14 bilhões de anos, a soma da série ainda não teria atingido o modesto número 100.

Exercício 4.6.1

Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ é divergente embora seu termo geral tenda a zero.

Teorema 4.22 *Sejam* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *séries convergentes e* c *um número real qualquer. Então as séries* $\sum(a_n + b_n)$ *e* $\sum cb_n$ *também são convergentes e suas respectivas somas são*

$$\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n \quad \text{e} \quad \sum cb_n = c\sum b_n.$$

Demonstração. Consequência imediata das propriedades aritméticas do limite de sequências aplicadas às sequências de somas parciais das duas séries. ∎

Séries de Termos Positivos

As séries cujos termos são todos positivos são particularmente simples de tratar, pois se $a_n \geq 0$ para todo n então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

ou é convergente, se for limitada, ou diverge para $+\infty$.

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries de termos positivos com $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a série $\sum a_n$ é **dominada** ou **majorada** pela série $\sum b_n$. Diz-se também que a série $\sum b_n$ é uma **majorante** da série $\sum a_n$.

Teorema 4.23 (Teste da Comparação) *Sejam* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *séries de termos positivos com* $a_n \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(i) Se $\sum b_n$ *converge então* $\sum a_n$ *também converge e* $\sum a_n \leq \sum b_n$.

(ii) Se $\sum a_n$ *diverge então* $\sum b_n$ *também diverge.*

Demonstração. (i) As somas parciais

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \cdots + a_n \\ &\leq b_1 + \cdots + b_n \\ &\leq \sum b_n \end{aligned}$$

constituem uma sequência monótona crescente e limitada superiormente. Portanto, $\sum a_n = \lim s_n$ existe e $\sum a_n \leq \sum b_n$ pelo Exercício 4.2.1. (ii) Se $\sum b_n$ convergisse então a série $\sum a_n$ também convergiria pelo item (i). ∎

Na verdade, basta que exista $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n$ para todo $n > N$ para que as conclusões do teorema sejam válidas.

Exemplo 4.6.3
O número e. Por definição,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Como, para $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n} < \frac{1}{\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times 2}_{n-1 \text{ termos}}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

e a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

é convergente, segue-se que a série acima que define e é convergente e temos

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 3.$$

Desta análise conclui-se que

$$2 < e < 3.$$

Teorema 4.24 *O número e é irracional.*

Demonstração. Usaremos redução ao absurdo. Suponha que e seja racional: $e = p/q$ com $p, q \in \mathbb{N}$. Como $2 < e < 3$, necessariamente $q \geq 2$. Podemos escrever

$$e = 1 + 1 + \cdots + \frac{1}{q!} + R_q$$

onde o resto R_q pode ser estimado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} R_q &= \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} + \cdots < \frac{1}{(q+1)!}\left[1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{(q+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{(q+1)!} \frac{q+1}{q} = \frac{1}{q!\,q}. \end{aligned}$$

Logo, com $e = p/q$, temos

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!\,q}.$$

Multiplicando esta inequação por $q!$ resulta

$$0 < \underbrace{p(q-1)! - \left(q! + q! + \frac{q!}{2!} + \cdots + \frac{q!}{q!}\right)}_{\text{número inteiro}} < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2},$$

que é um absurdo, pois afirma a existência de um número inteiro compreendido entre 0 e 1/2. ∎

Euler foi o primeiro a estabelecer a irracionalidade de e, em 1737, por argumento diferente do exposto acima. É muito mais difícil demonstrar que π é irracional, e o primeiro a fazê-lo foi Johann Lambert, em 1761. Baseada numa representação de $\tan x$ como fração contínua, a prova de Lambert pode ser encontrada em Hairer & Wanner (1996). Spivak (1994) e Figueiredo (2011) apresentam uma prova moderna da irracionalidade de π.

Convergência Absoluta e Convergência Condicional

Definição 4.25 *A série $\sum a_n$ é dita* ***absolutamente convergente*** *se $\sum |a_n|$ é convergente. Se $\sum a_n$ é convergente mas $\sum |a_n|$ é divergente, diz-se que série $\sum a_n$ é* ***condicionalmente convergente.***

Teorema 4.26 (Critério de Cauchy Para Séries) *A série $\sum a_n$ é convergente se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$$

para todo $n > N$ e todo número natural p.

Demonstração. Basta aplicar o critério de Cauchy (Teorema 4.15) à sequência de somas parciais (s_n) com $m = n + p$. ∎

Teorema 4.27 *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Suponha que $\sum |a_n|$ seja convergente. Pelo critério de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||a_{n+1}| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|| < \epsilon \Longrightarrow |a_{n+1}| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon,$$

para todo $n > N$ e todo número natural p. Portanto,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon,$$

para todo $n > N$ e todo número natural p. Segue-se que a série $\sum a_n$ é convergente porque também satisfaz o critério de Cauchy. ∎

Testes de Convergência

Teorema 4.28 (Teste da Razão ou de d'Alembert) *Se* $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ *a série* $\sum a_n$*:*

(a) converge absolutamente se $L < 1$*;*

(b) diverge se $L > 1$*.*

O teste é inconclusivo se $L = 1$*.*

Demonstração. Se $L < 1$ seja c tal que $L < c < 1$. Façamos $b_n = |a_{n+1}|/|a_n|$, de modo que $\limsup b_n = L < c$. A partir de um número natural suficientemente grande N todos os elementos da sequência (b_n) ficam abaixo de c, isto é,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < c \implies |a_{n+1}| < c|a_n|,$$

donde

$$|a_{N+p}| < c|a_{N+p-1}| < c^2|a_{N+p-2}| < \cdots < c^p|a_N|.$$

Logo, a partir de $n = N$ a série $\sum |a_n|$ é dominada pela série geométrica convergente $\sum_{p=1}^{\infty} c^p|a_N|$. Pelo critério da comparação, $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Se $L > 1$ tome c tal que $1 < c < L$. A partir de um certo número natural N, todos os elementos da sequência (b_n) ficam acima de c, isto é,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > c \implies |a_{n+1}| > c|a_n|.$$

Deduz-se, agora, que $|a_{N+p}| > c^p|a_N|$ e a série $\sum a_n$ é divergente porque o seu termo geral não tende a zero. Os argumentos anteriores falham se $L = 1$ e nada se pode concluir a respeito da convergência da série. ∎

Exemplo 4.6.4

Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Temos

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Portanto, a série é convergente.

Teorema 4.29 (Teste da Raiz ou de Cauchy) *Se* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = L$ *então a série* $\sum a_n$*:*

(a) converge absolutamente se $L < 1$*;*

(b) diverge se $L > 1$.

O teste é inconclusivo se $L = 1$.

Demonstração. Se $L < 1$, seja c tal que $L < c < 1$. A partir de um certo número natural N temos $\sqrt[n]{|a_n|} < c$. Logo, para $n > N$, $|a_n| < c^n$ e a série $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$ é dominada pela série geométrica convergente $\sum_{n=N+1}^{\infty} c^n$. Pelo critério da comparação, $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Se $L > 1$ existe c tal que $1 < c < L$ tal que, a partir de um certo número natural N, $\sqrt[n]{|a_n|} > c$ donde $|a_n| > c^n$. Segue-se que a série $\sum a_n$ é divergente porque o seu termo geral não tende a zero. Os argumentos anteriores não se aplicam se $L = 1$ e nada se pode concluir a respeito da convergência da série. ∎

Exemplo 4.6.5

Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n},\ k\in\mathbb{N},\ a>0.$$

Temos

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^k}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n})^k}{a} = \frac{1^k}{a} = \frac{1}{a},$$

de modo que a série converge se $a > 1$ e diverge se $a < 1$. Se $a = 1$ o teste em si não é conclusivo, mas a série é divergente porque o seu termo geral não tende a zero.

O teste da raiz é mais potente que o teste da razão. Isto pode ser provado de modo geral (Ávila 1999, p. 59-60; Lima 2004, p. 142), mas vamos nos contentar com um exemplo.

Exemplo 4.6.6
Considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + 2a + a^2 + 2a^3 + a^4 + 2a^5 + \cdots$$

onde $a_n = a^n$ para n par e $a_n = 2a^n$ para n ímpar, com $0 < a < 1$. Então

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a^n} = a \;\; (n \text{ par}) \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2a^n} = a\sqrt[n]{2} \;\; (n \text{ ímpar}),$$

donde

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} a\sqrt[n]{2} = a$$

porque $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ (verifique). Portanto, o teste da raiz garante a convergência da série para $a < 1$. Por outro lado,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2a \;\; (n \text{ par}) \quad \text{e} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{2} \;\; (n \text{ ímpar}),$$

donde

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2a$$

e o teste da razão só permite concluir que a série converge se $a < 1/2$. Note que neste exemplo o limite de $|a_{n+1}|/|a_n|$ não existe, de modo que o uso do limite superior é necessário em geral tanto no teste da razão quanto no da raiz.

Teorema 4.30 (Teste da Integral ou de Maclaurin) *Seja f uma função positiva, decrescente e integrável em qualquer intervalo da semirreta real positiva. Então*

$$f(2) + \cdots + f(n) < \int_1^n f(x)dx < f(1) + \cdots + f(n-1) \qquad (*)$$

e a série $\sum f(n)$ converge ou diverge conforme a integral $\int_1^n f(x)dx$ seja convergente ou divergente para $n \to \infty$.

Demonstração. Como $f(k) < f(x) < f(k-1)$ para $k-1 < x < k$, temos

$$f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)dx < \int_{k-1}^{k} f(x)dx < \int_{k-1}^{k} f(k-1)dx = f(k-1).$$

Somando sobre k de 2 até n resulta (*). Pelo critério da comparação, a série $\sum f(n)$ converge ou diverge conforme a convergência ou divergência da integral $\int_1^n f(x)dx$ para $n \to \infty$. ∎

Exemplo 4.6.7
A função zeta de Riemann é definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots, \quad s > 1.$$

Os testes da razão e da raiz resultam inconclusivos quando aplicados a esta série (verifique). O teste da integral é aplicável com $f(x) = 1/x^s$ e temos

$$\int_1^n \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}\left[\frac{1}{n^{s-1}} - 1\right]$$

que converge no limite $n \to \infty$ se $s > 1$ e diverge se $s \leq 1$ (no caso $s = 1$ a integral diverge logaritmicamente). A função zeta de Riemann também é definida para s complexo, e a série acima que define $\zeta(s)$ é convergente se $\text{Re}\, s > 1$.

A função zeta de Riemann pode ser estendida a todo o plano complexo como uma função meromorfa (Ahlfors 1981; Lins Neto 1996) e desempenha um papel central nas aplicações da análise complexa à teoria dos números. A hipótese ou conjectura de Riemann é um dos grandes problemas em aberto da matemática atual (é um dos famosos 23 problemas de Hilbert). A função zeta tem zeros nos inteiros negativos pares, conhecidos como zeros triviais. A hipótese de Riemann diz respeito aos zeros não triviais, e afirma que a parte real de qualquer zero não trivial da função zeta é 1/2. Em 1912, G. H. Hardy provou a existência de uma infinidade de zeros sobre a *linha crítica* $\text{Re}\, s = 1/2$. Embora se acredite que a conjectura de Riemann é verdadeira, ninguém conseguiu provar que todos os zeros não triviais situam-se na linha crítica. A função zeta de Riemann é usada na Física para regularizar certas séries divergentes que ocorrem na teoria quântica de campos.

Exercício 4.6.2
Use as desigualdades (*) para provar a afirmação, feita nas últimas linhas do Exemplo 4.6.2, a respeito da extrema lentidão da divergência da série harmônica.

Teorema 4.31 (Critério de Raabe) *Se* $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)=L$ *então a série* $\sum a_n$:

(a) converge absolutamente se $L>1$;

(b) diverge ou converge condicionalmente se $L<1$.

O critério falha se $L=1$.

Omitiremos a demonstração deste teorema, que pode ser encontrada em Dienes (1957, p. 78). Note que, no caso de uma série de termos positivos, ocorre a divergência se $L<1$. Se a série não tem somente termos positivos, o critério de Raabe afirma apenas que se $L<1$ a série não é absolutamente convergente, podendo convergir condicionalmente.

Exemplo 4.6.8
Dada a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1\times4}{3\times6}\right)^2+\left(\frac{1\times4\times7}{3\times6\times9}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1\times4\times7\times\cdots\times(3n-2)}{3\times6\times9\cdots\times(3n)}\right)^2+\cdots$$

temos

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left[1-\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n(12n+8)}{9n^2+18n+9}=\frac{4}{3}>1.$$

Portanto, a série é convergente pelo critério de Raabe.

Finalmente, consideremos um critério devido a Gauss que é um pouco mais difícil de aplicar mas tem a vantagem de ser sempre conclusivo quanto à convergência absoluta.

Teorema 4.32 (Critério de Gauss) *Se* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1-\frac{L}{n}+\frac{c_n}{n^2}$ *e a sequência* (c_n) *é limitada, então a série* $\sum a_n$:

(a) converge absolutamente se $L>1$;

(b) diverge ou converge condicionalmente se $L\le 1$.

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em Dienes (1957, p. 78).

Exemplo 4.6.9
Para a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)^2 + \left(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\cdots\times(2n)}\right)^2 + \cdots$$

os testes da razão e da raiz e o critério de Raabe falham. No entanto,

$$\begin{aligned}
\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 \\
&= \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} \\
&= \frac{4n^2+8n+4-(4n+3)}{4n^2+8n+4} \\
&= 1 - \frac{4n+3}{4n^2+8n+4} \\
&= 1 - \frac{(4n^2+3n)/n}{4n^2+8n+4} \\
&= 1 - \frac{[4n^2+8n+4-(5n+4)]/n}{4n^2+8n+4} \\
\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= 1 - \frac{1}{n} + \frac{c_n}{n^2}
\end{aligned}$$

onde

$$c_n = \frac{5+4/n}{4+8/n+4/n^2}$$

Como $L = 1$ e (c_n) é limitada porque converge para $5/4$, segue-se que a série é divergente pelo critério de Gauss.

Séries Alternadas

Definição 4.33 *Uma série é dita* ***alternada*** *se seus termos trocam alternadamente de sinal.*

Teorema 4.34 (Teste de Leibnitz) *Seja* (a_n) *uma sequência decrescente que tende a zero:* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ *e* $a_n \to 0$. *Então a série alternada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *converge. Além disso, o erro cometido ao se tomar alguma reduzida como aproxi-*

mação da soma da série é, em valor absoluto, menor ou igual ao valor absoluto do primeiro termo desprezado.

Demonstração. Notemos, inicialmente, que $a_n \geq 0$ para todo n porque (a_n) tende a zero de forma decrescente. A ideia essencial da demonstração consiste em considerar separadamente as reduzidas de ordem par e de ordem ímpar e mostrar que ambas convergem para o mesmo limite. As reduzidas de ordem par e de ordem ímpar são, respectivamente,

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

e

$$s_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1}).$$

Destas expressões vê-se que (s_{2n}) é monótona crescente e (s_{2n+1}) é monótona decrescente. Além disso,

$$s_{2n} = s_{2n+1} - a_{2n+1} \leq s_{2n+1} \leq a_1 .$$

Portanto, (s_{2n}) converge para um certo número s porque é monótona crescente e limitada superiormente. Segue-se que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + a_{2n+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} \\ &= s . \end{aligned}$$

Como tanto as reduzidas de ordem par quanto as de ordem ímpar convergem para o mesmo limite s, a série converge para s. Para estimar o erro cometido ao se truncar a série, note que

$$s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1} \quad \text{e} \quad s_{2n+2} \leq s \leq s_{2n+1}$$

porque (s_{2n}) é monótona crescente, (s_{2n+1}) é monótona decrescente e ambas convergem para s. Estas últimas as desigualdades conduzem a

$$0 \leq s - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \quad \text{e} \quad 0 \leq s_{2n+1} - s \leq s_{2n+1} - s_{2n+2} = a_{2n+2} .$$

Isto prova que $|s_n - s| \leq a_{n+1}$ para todo n. ∎

Exemplo 4.6.10
A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

é convergente porque $a_n = 1/n$ preenche os requisitos do teste de Leibnitz. Sabe-se que a soma desta série é $\ln 2$.

Rearranjos de Séries

Encerremos com um alerta para os cuidados que devem ser tomados no uso da propriedade de comutatividade da adição para séries infinitas. A comutatividade da adição está assegurada somente para a soma de um número finito de termos, e não se pode garantir *a priori* que a mudança da ordem dos termos de uma série não afete a sua soma.

Definição 4.35 *Um* ***rearranjo*** *da série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é a nova série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ *onde* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *é uma bijeção.*

Qualquer rearranjo de uma série absolutamente convergente tem a mesma soma que a série original (Lima 2004, p. 151). O mesmo não se pode dizer de séries que só convergem condicionalmente.

Exemplo 4.6.11
Como já vimos, a série

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

é convergente e temos

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots.$$

Podemos escrever

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

e

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots,$$

que somadas termo a termo fornecem

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots .$$

Note que esta série é meramente um rearranjo da série original mas sua soma é diferente.

Se você está surpreso com este exemplo, ainda mais surpreendente é um resultado geral devido a Riemann.

Teorema 4.36 (Riemann) *Seja* $\sum a_n$ *uma série condicionalmente convergente. Então existe um rearranjo de* $\sum a_n$ *que converge para qualquer número real arbitrariamente escolhido. Também existem rearranjos da série que divergem para* $+\infty$ *e para* $-\infty$.

A demonstração deste notável teorema não é particularmente difícil e pode ser encontrada, por exemplo, em Dunham (2005, p. 112) ou Lima (2004, p. 151).

Finalmente, é permitido associar termos de séries convergentes, mesmo quando a convergência é apenas condicional. A razão disto é que associando termos pela introdução de parênteses resulta uma sequência de reduzidas que é uma subsequência das reduzidas da série original. Mas se uma sequência converge para s qualquer uma de suas subsequências converge igualmente para s, de modo que a soma dos termos de séries convergentes é associativa.

Leituras Adicionais Selecionadas[1]

Ávila, G. 1999 *Introdução à Análise Matemática.*

Courant, R. e John, F. 1999 *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. I.

Figueiredo, D. G. 1996 *Análise I.*

- Johnsonbaugh, R. e Pfaffenberger, W. E. 2002 *Foundations of Mathematical Analysis.*
- Lima, E. L. 2004 *Curso de Análise*, Vol. 1.
- Spivak, M. 1994 *Calculus.*

1. A lista completa de referências, com plenos detalhes bibliográficos, encontra-se na Bibliografia no fim do livro. O símbolo • destaca obras cuja leitura é altamente recomendada.

Problemas

4.1. Prove que uma sequência de números inteiros é convergente se e somente se a partir de um certo número natural N todos os elementos da sequência forem iguais a um dado número inteiro.

4.2. Exiba uma sequência (a_n) que satisfaz $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$ mas não é uma sequência de Cauchy. Não basta, portanto, que os termos consecutivos se aproximem indefinidamente para que a sequência seja de Cauchy.

4.3. Seja a um número real qualquer. Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Prove, também, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

4.4. Considere a sequência (a_n) definida por $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ e $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n^2$. Discuta a determinação do limite de (a_n) descrita a seguir. Seja $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Então

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+2} = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_n^2) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} + \lim_{n\to\infty} a_n^2 = a + a^2,$$

donde $a = 0$.

4.5. Seja (a_n) uma sequência de termos positivos com $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Intuitivamente, qual deve ser o valor de $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n}$? Prove sua conjectura.

4.6. Sabendo que $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = e$, determine os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$;

(e) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$;

(f) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$.

4.7. Seja (a_n) a sequência definida por $a_1 = 0$ e

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(a - a_n^2), \quad 0 < a < 1.$$

Prove que a_n converge e determine o seu limite. Sugestão: comece mostrando que que $0 \le a_n \le 1$ para todo n.

4.8. Sejam a e x números reais positivos e seja (a_n) a sequência positiva definida por

$$a_1 = a,\ a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}\right) \text{ para } n \ge 2.$$

(a) Prove que a, partir do segundo termo, (a_n) é uma sequência decrescente. Sugestão: comece provando que $a_n^2 \ge x$ se $n > 1$. (b) Prove que (a_n) converge para $\sqrt{x}$.

4.9. Prove que a sequência (a_n) definida por $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2},\ n = 1,2,3,\ldots$$

é ilimitada.

4.10. Prove que a sequência

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

é convergente e que seu limite pertence ao intervalo $[1/2, 1)$.

4.11. Seja (x_n) a sequência definida por

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \text{ para } n \ge 3,$$

onde a e b são números reais. (a) Prove que (x_n) é uma sequência limitada. (b) Prove que a relação de recorrência que define x_n para $n \ge 3$ admite soluções da forma $x_n = \lambda^n$. (c) Prove que

$$x_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{b-a}{3}\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e determine o limite de (x_n).

4.12. Dada uma sequência (a_n), seja (s_n) a sequência das médias aritméticas de (a_n):

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Prove que se (a_n) converge para a então (s_n) também converge para a. Mostre que a recíproca não é verdadeira.

4.13. (a) Se (a_n) é uma sequência de termos positivos que converge para a, prove que $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ também converge para a. Sugestão: tome o logaritmo e use o resultado do problema anterior, além da continuidade do logaritmo e da função exponencial. (b) Seja (a_n) uma sequência de termos positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$. Prove que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$. Disto deduza que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e.$$

4.14. Prove que a sequência

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \ldots$$

é convergente e calcule o seu limite.

4.15. Determine os valores do número real a para os quais a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n n^a$$

é convergente.

4.16. Se $a_n > 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, prove que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ convergem.

4.17. Dada uma sequência (a_n), diz-se que a série correspondente da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

é uma **série telescópica**. Encontre uma condição necessária e suficiente para a convergência da série telescópica em termos da sequência associada (a_n). No caso em que a série é convergente, determine sua soma.

4.18. Se (a_n) é uma sequência de números reais não nulos e $a_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

é convergente e determine sua soma.

4.19. Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

é convergente e determine sua soma.

4.20. Prove que se a série de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{1+a_n^2}$$

converge. Se a primeira série divergir, mostre que a segunda pode convergir ou divergir.

4.21. Se $a_n > 0$ para todo n, prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^p a_n}$ converge se $p > 1$.

4.22. Investigue a convergência das seguintes séries:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\alpha}};\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}.$$

5

Funções Reais: Continuidade e Diferenciabilidade

Neste capítulo nossa atenção estará voltada para as funções reais, isto é, funções cujo domínio é um subconjunto X de $\mathbb{R}$ e cujo contradomínio é $\mathbb{R}$.

5.1 *Limite de uma Função*

Considere uma função real $f : X \to \mathbb{R}$. Intuitivamente, dizemos que $f(x)$ tem um limite quando $x \to a$ se existe um número real L do qual $f(x)$ se aproxima indefinidamente à medida que $x \in X$ se aproxima indefinidamente de a. Para que esta noção de limite faça sentido é preciso que toda vizinhança de a contenha algum $x \in X$ não necessariamente igual a a.

Definição 5.1 *Um número $a \in \mathbb{R}$ é* ***ponto de acumulação*** *de $X \subset \mathbb{R}$ se para cada $\epsilon > 0$ o intervalo aberto $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, centrado em a, contém algum ponto $x \in X$* distinto *de a.*

Exemplo 5.1.1
(a) Todos os pontos de $X = (0,1)$ são pontos de acumulação de X. Além desses, 0 e 1 são também pontos de acumulação de X que não pertencem a X. (b) O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ não tem pontos de acumulação. (c) O conjunto $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$ só tem um ponto de acumulação: 0. (d) Qualquer número real é ponto de acumulação do conjunto dos números racionais.

Definição 5.2 *Dada uma função real $f : X \to \mathbb{R}$, seja a um ponto de acumulação de X. Diz-se que L é o* ***limite de $f(x)$ quando x tende para a****, e escreve-se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Deve-se destacar que não é preciso que a função esteja definida no ponto a para possuir um limite quando $x \to a$, isto é, a não precisa pertencer ao domínio de f.

O limite de uma função é único e tem as mesmas propriedades algébricas que o limite de uma sequência.

Exemplo 5.1.2
Seja $X = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e considere $f : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Então, como $x \neq 1$,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2.$$

Teorema 5.3 *Se $f : X \to \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então f é limitada numa vizinhança suficientemente pequena de a.*

Demonstração Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e tome $\epsilon = 1$. Existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < 1$ se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$. Logo,

$$|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| \leq 1 + |L|$$

para todo $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \delta$. ∎

Um critério importante para decidir se uma função tem limite envolve a convergência de sequências.

Teorema 5.4 *Para que se tenha $\lim_{x \to a} f(x) = L$ é necessário e suficiente que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$ para toda sequência $(x_n) \in X \setminus \{a\}$ que converge para a.*

Demonstração Necessidade. Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e seja (x_n) uma sequência arbitrária de $X \setminus \{a\}$ que converge para a. Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$. Como $x_n \to a$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < |x_n - a| < \delta$ para todo $n > N$. Logo, $|f(x_n) - L| < \epsilon$ para todo $n > N$, de modo que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Suficiência. Argumentaremos por contraposição. Suponha que seja falso que $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ e $|f(x) - L| \geq \epsilon$. Portanto, para cada termo da sequência $\delta_n = 1/n$ existe x_n tal que $0 < |x_n - a| < 1/n$ e $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Portanto, a sequência (x_n) converge para a mas não se tem $f(x_n) \to L$. ∎

Exemplo 5.1.3

Se $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ então $f(x)$ não tem limite quando $x \to 0$. Basta notar que ambas as sequências $x_n = 1/n\pi$ e $y_n = 2/(4n+1)\pi$ convergem para 0 mas $f(x_n) = 0$ e $f(y_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$ porque $x \mapsto \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ é limitada. Com efeito, para cada $\epsilon > 0$ basta escolher $\delta = \epsilon$ para que, se $0 < |x| < \delta$, tenhamos

$$\left| x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - 0 \right| = |x| \left| \operatorname{sen}\frac{1}{x} \right| \leq |x| < \delta = \epsilon.$$

Limites laterais também podem ser definidos, mas antes precisamos definir pontos de acumulação à esquerda e à direita.

Definição 5.5 *Um número $a \in \mathbb{R}$ é* ***ponto de acumulação à direita*** *de $X \subset \mathbb{R}$ se para cada $\epsilon > 0$ o intervalo $[a, a+\epsilon)$ contém algum ponto $x \in X$* distinto *de a. Um número $a \in \mathbb{R}$ é* ***ponto de acumulação à esquerda*** *de $X \subset \mathbb{R}$ se para cada $\epsilon > 0$ o intervalo $(a-\epsilon, a]$ contém algum ponto $x \in X$* distinto *de a.*

Definição 5.6 *Dada uma função real $f : X \to \mathbb{R}$, seja a um ponto de acumulação à direita de X. Diz-se que L é o* ***limite à direita de $f(x)$ quando x tende para a***, *e escreve-se*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x) = L,$$

se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < x -$

*$a < \delta$. Diz-se que L é o **limite à esquerda de** $f(x)$ **quando** x **tende para** a, e escreve-se*

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \uparrow a} f(x) = L,$$

se a é um ponto de acumulação à esquerda de X e se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < a - x < \delta$.

Evidentemente, $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e é igual a L se e somente se existem os limites à esquerda e à direita de $f(x)$ quando x tende para a e são ambos iguais a L.

Exemplo 5.1.4
Seja $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Então $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$.

Exercício 5.1.1
Defina $\lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e prove que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Exercício 5.1.2
Dê um significado preciso às expressões $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e prove que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty \text{ e } \lim_{x \to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty.$$

Defina os limites laterais $\lim_{x \to a\pm} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a\pm} f(x) = -\infty$ e prove que

$$\lim_{x \to a+} \frac{1}{x - a} = \infty \text{ e } \lim_{x \to a-} \frac{1}{x - a} = -\infty.$$

5.2 *Funções Contínuas*

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a de seu domínio se atribuindo

valores a $x \in X$ cada vez mais próximos de a resultam valores de $f(x)$ cada vez mais próximos de $f(a)$.

Definição 5.7 *Diz-se que a função real $f : X \to \mathbb{R}$ é **contínua no ponto** $a \in X$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Se f é contínua em todos os pontos de X diz-se simplesmente que f é **contínua**.*

Em notação simbólica, a continuidade de f em a exprime-se da seguinte forma:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

Ao contrário da noção de limite de uma função $f : X \to \mathbb{R}$, que não requer a condição $a \in X$, só faz sentido perguntar se uma função é contínua em pontos do seu domínio. De maneira geral, δ depende tanto de ϵ quanto de a.

Se a é um **ponto isolado** de X, isto é, se para algum $\delta > 0$ o único elemento de X que pertence ao intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ é a, segue-se que que *qualquer* função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a. De fato, para cada $\epsilon > 0$ basta tomar $\delta > 0$ tal que somente a pertença ao intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ para se ter $|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \epsilon$ sempre que $|x - a| < \delta$. Se todos os pontos de X são isolados qualquer função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua.

Situação mais interessante é aquela em que a é ponto de acumulação de X. Neste caso, $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a se e somente se $\lim_{x \to a} = f(a)$. Em particular, os limites à esquerda e à direita de $f(x)$ quando x tende para a devem existir e ser iguais.

Exemplo 5.2.1
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Então f é contínua. Com efeito, para qualquer $a \in \mathbb{R}$ temos, por um lado,

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x + a||x - a| \leq (|x| + |a|)|x - a|.$$

Por outro lado, se $\delta < 1$ então $|x - a| < \delta$ implica $|x| \leq |x - a| + |a| < 1 + |a|$. Dado $\epsilon > 0$ a escolha $\delta < \min\left\{1, \frac{\epsilon}{1 + 2|a|}\right\}$ fornece, sempre que $|x - a| < \delta$,

$$|f(x) - f(a)| \leq (|x| + |a|)|x - a| < (1 + 2|a|)\frac{\epsilon}{1 + 2|a|} = \epsilon.$$

Mesmo em exemplos muito simples como o anterior, é inconveniente e penoso aplicar diretamente a definição para provar que uma função é contínua. Tendo em vista as propriedades do limite de sequências, é de se esperar que somas, produtos e quocientes de funções contínuas sejam também funções contínuas.

Dadas duas funções $f,g : X \to \mathbb{R}$ e um número real c, as funções $f+g$, cf, fg e f/g são definidas da maneira óbvia: para todo $x \in X$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);$$
$$(cf)(x) = cf(x);$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x);$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0.$$

Teorema 5.8 *Se $c \in \mathbb{R}$ e $f,g : X \to \mathbb{R}$ são funções contínuas no ponto $a \in X$ então $f+g$, cf e fg são contínuas em a. Se $g(a) \neq 0$ então f/g é contínua em a.*
Demonstração. É a mesma, com adaptações óbvias, que a do Teorema 4.7. ∎

Como a função identidade $id_{\mathbb{R}}$ definida por $id_{\mathbb{R}}(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é obviamente contínua, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ é contínua porque $f = id_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{R}}$. Por indução, a função $x \mapsto x^n$ é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se que

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios é contínua em todos os pontos com $Q(x) \neq 0$.

Como seria de se esperar, a composição de duas funções contínuas produz uma função contínua.

Teorema 5.9 *Se $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subset Y$ são contínuas nos pontos $a \in X$ e $b = f(a) \in Y$, respectivamente, então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a.*
Demonstração. Seja $x_n \in X$ uma sequência que converge para a. Como f é contínua em a, $f(x_n) \to f(a) = b$. Como g é contínua em b, $g(f(x_n)) \to g(b) = g(f(a))$, isto é, $g \circ f(x_n) \to g \circ f(a)$. Pelo Teorema 5.4, $g \circ f$ é contínua no ponto a. ∎

Exceto quando a é um ponto isolado, dizer que f é contínua em a é o mesmo que dizer que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Portanto, como sugere o Teorema

4.5 para sequências, se f é contínua em a é de se esperar que exista uma vizinhança de a na qual f seja limitada.

Teorema 5.10 *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$, existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que $|f(x)| < M$ para todo $x \in X$ com $|x - a| < \delta$.*
Demonstração. Se f é contínua em a existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < 1$. Logo,

$$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| < 1 + |f(a)| = M$$

para todo $x \in X$ com $|x - a| < \delta$. ∎

5.3 *Descontinuidades*

Se f não é contínua em a diz-se que f é **descontínua** em a, e que a é **ponto de descontinuidade** de f.

Exemplo 5.3.1
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Esta função é contínua em qualquer $x \neq 0$ mas é descontínua em $x = 0$.

Diz-se que f tem uma **descontinuidade de primeira espécie** em a se f é descontínua em a mas existem os limites laterais $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ (os quais, obviamente, são diferentes). Uma descontinuidade de primeira espécie é uma **salto** da função. Diz-se que f tem uma **descontinuidade de segunda espécie** em a se f é descontínua em a e pelo menos um dos limites laterais não existe.

Exemplo 5.3.2
A função de Dirichlet

$$f_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

é descontínua em todos os pontos, os quais são pontos de descontinuidade de segunda espécie.

Teorema 5.11 *Uma função monótona não admite descontinuidades de segunda espécie.*

Demonstração. Suponha $f : X \to \mathbb{R}$ crescente e seja a um ponto de acumulação à esquerda de X. Seja $L = \sup\{f(x) \mid x \in X \text{ e } x < a\}$. Afirmamos, como é intuitivo, que $L = \lim_{x \to a-} f(x)$. Por definição de supremo, dado $\epsilon > 0$ existe $x_0 < a$ em X tal que $f(x_0) > L - \epsilon$. Seja $\delta = a - x_0 > 0$. Como $f(x)$ é crescente, segue-se que $L - \epsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq L$, que implica $|f(x) - L| < \epsilon$, sempre que $a - \delta = x_0 < x < a$, que prova a afirmação. Do mesmo maneira, prova-se que $\lim_{x \to a+} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in X \text{ e } x > a\}$. O caso em que f é decrescente trata-se de modo inteiramente análogo. ∎

5.4 *Funções Contínuas em Intervalos*

O conjunto de pontos de acumulação de um conjunto A é denotado por A'. O intervalo fechado $[a, b]$ contém todos os seus pontos de acumulação, o que motiva a definição a seguir.

Definição 5.12 *Um conjunto é* ***fechado*** *se contém todos os seus pontos de acumulação.*

Exemplo 5.4.1
O conjunto $A = \{1/2, 2/3, 3/4, \ldots, n/(n+1), \ldots\}$ não é fechado porque não contém o número 1, que é o seu único ponto de acumulação. Por outro lado, o conjunto $B = \{1, 1/2, 2/3, 3/4, \ldots, n/(n+1), \ldots\} = A \cup \{1\}$ é fechado.

Definição 5.13 *A* ***aderência*** *ou* ***fecho*** *de um conjunto A, que se denota por $\bar{A}$, é o conjunto obtido acrescentando a A todos os seus pontos de acumulação: $\bar{A} = A \cup A'$.*

Evidentemente, um conjunto é fechado se e somente se coincide com sua aderência, isto é, $A = \bar{A}$.

Definição 5.14 *Uma* ***vizinhança*** *do ponto $a \in \mathbb{R}$ é qualquer intervalo aberto que contém a.*

Definição 5.15 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é* ***aberto*** *se todo ponto $x \in X$ pertence a uma vizinhança inteiramente contida em X.*

Exemplo 5.4.2
Todo intervalo aberto é um conjunto aberto. O conjunto de todos os números reais é aberto. O conjunto dos números racionais não é aberto (por quê?).

Cuidado, aberto não é o oposto de fechado! O conjunto $[0,1)$ não é aberto nem fechado. O conjunto de todos os números reais é aberto e fechado. O conjunto dos números racionais não é aberto nem fechado.

Definição 5.16 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é **limitado** se existe $M > 0$ tal que $|x| \leq M$ para todo $x \in X$.*

Definição 5.17 Um conjunto $C \subset \mathbb{R}$ é dito **compacto** se é fechado e limitado.

Quando discutirmos espaços topológicos será apresentada uma definição mais geral de conjunto compacto, que equivale à definição acima no caso particular de conjuntos de números reais.

A partir do traçado do gráfico de uma função contínua num intervalo fechado, é evidente que a função é limitada, assume um valor máximo e um valor mínimo e todos os valores intermediários entre seus valores máximo e mínimo. As evidências geométricas são muito importantes mas não devem ser confundidas com uma prova rigorosa dessas propriedades.

Teorema 5.18 *Toda função contínua num intervalo compacto é limitada.*
Demonstração. Suponha que f não seja limitada num intervalo compacto I. Então existe $x_1 \in I$ tal que $|f(x_1)| > 1$, pois do contrário f seria limitada por 1. Pelo mesmo argumento, existe $x_2 \in I$ tal que $|f(x_2)| > 2$. Prosseguindo desta maneira, constrói-se uma sequência (x_n) tal que $|f(x_n)| > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, a sequência (x_n) possui uma subsequência (x_{n_k}) que converge para um ponto $a \in I$. No entanto, $|f(x_{n_k})| > n_k$ para todo k, de modo que $f(x_{n_k})$ não converge para $f(a)$ e f não é contínua. ∎

Teorema 5.19 (Weierstrass) *Seja f uma função contínua num intervalo compacto I. Então f assume valores máximo e mínimo em I, isto é, existem pontos $a,b \in I$ tais que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in I$.*

Demonstração. Sejam $M = \sup\{f(x) \mid x \in I\}$ e $m = \inf\{f(x) \mid x \in I\}$. Como f é limitada pelo Teorema 5.18, m e M existem, e é claro que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in I$. Por definição de supremo, dado $\epsilon = 1/n$ existe $x_n \in I$ tal que $f(x_n) > M - 1/n$. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge para um ponto $b \in I$. Segue-se que $M - 1/n_k < f(x_{n_k}) \leq M$, de modo que $f(x_{n_k})$ converge para M e, como f é contínua,

$$M = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\big(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\big) = f(b).$$

De modo inteiramente análogo, prova-se que $m = f(a)$ para algum $a \in I$. ∎

Para que as conclusões destes dois últimos teoremas se cumpram, é indispensável a hipótese de que o intervalo limitado é fechado.

Exemplo 5.4.3

A função $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua mas não é limitada nem assume um valor máximo no intervalo aberto $(0,1)$.

O teorema a seguir confirma a ideia intuitiva de que uma função contínua não pode passar de um valor para outro sem passar por todos os valores intermediários.

Teorema 5.20 (Teorema do Valor Intermediário) *Seja f uma função contínua num intervalo fechado e limitado $I = [a,b]$. Suponha que $f(a) \neq f(b)$ e seja y um número qualquer compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe $x \in (a,b)$ tal que $f(x) = y$.*

Demonstração. Caso (i): $f(a) < y < f(b)$. Seja $I = [a,b]$ e defina o conjunto

$$S = \{t \in I \mid f(t) < y\}.$$

Então S não é vazio, pois $a \in S$, e é limitado superiormente por b. Portanto, S tem um supremo $x = \sup S$ com $x < b$. A ideia é provar que $f(x) = y$. Conforme já vimos na demonstração do Teorema 5.19, existe uma sequência $x_n \in S$ que converge para x. Tendo em vista que f é contínua,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Levando em conta que $f(x_n) < y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq y. \tag{§}$$

Como x é o supremo de S, $\tilde{x}_n = x + 1/n$ é cota superior de S para cada n. Para n suficientemente grande $\tilde{x}_n \in I$ mas $\tilde{x}_n \notin S$, isto é, $f(\tilde{x}_n) \geq y$. Como $\tilde{x}_n \to x$, temos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) \geq y. \tag{§§}$$

De (§) e (§§) resulta $f(x) = y$.
Caso (ii): $f(a) > y > f(b)$. Temos $-f(a) < -y < -f(b)$ e com $g(x) = -f(x)$ recaímos no caso anterior. Portanto, existe $x \in (a,b)$ tal que $g(x) = -y$, isto é, $f(x) = y$. ∎

A recíproca deste teorema é falsa: uma função descontínua pode ter a propriedade do valor intermediário. A função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por (Hardy 1992)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 - x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

é descontínua em $x = 0$ e $x = 1$ mas assume todos os valores intermediários entre $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Como se vê, a noção intuitiva de continuidade como equivalente à propriedade de assumir todos os valores intermediários, que Leibnitz esposava, é inconsistente com a concepção contemporânea de continuidade.

Como veremos na Seção 5.6, toda derivada, mesmo descontínua, automaticamente possui a propriedade do valor intermediário (teorema de Darboux).

5.5 *Continuidade Uniforme*

Uma função f é contínua no conjunto S se e somente se

$$(\forall a \in S)(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in S)(|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

A posição do quantificador existencial $\forall a$ permite que δ seja diferente para diferentes pontos de S, isto é, de modo geral, δ depende não apenas de ϵ, mas também de a.

Exemplo 5.5.1
No caso da função definida por $f(x) = x^2$, como vimos no Exemplo 5.2.1, $|x - a| < \delta$ implica $|x^2 - a^2| < \epsilon$ se tomarmos $\delta < \min\left\{1, \frac{\epsilon}{1 + 2|a|}\right\}$. Observe que, para um ϵ fixo, δ torna-se cada vez menor à medida que a cresce.

Em comparação, considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Temos

$$\begin{aligned} |g(x) - g(a)| &= \left| \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + a^2} \right| \\ &= \frac{|x^2 - a^2|}{(1 + x^2)(1 + a^2)} = \frac{|x + a|}{(1 + x^2)(1 + a^2)} |x - a| \\ &\leq \left(\frac{|x|}{(1 + x^2)(1 + a^2)} + \frac{|a|}{(1 + x^2)(1 + a^2)} \right) |x - a| \\ &\leq \left(\frac{|x|}{1 + x^2} + \frac{|a|}{1 + a^2} \right) |x - a|. \end{aligned}$$

Notando que

$$(1 - |x|)^2 \geq 0 \Longrightarrow 1 - 2|x| + x^2 \geq 0 \Longrightarrow |x| \leq \frac{1 + x^2}{2}$$

resulta, finalmente,

$$|g(x) - g(a)| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) |x - a| = |x - a|.$$

Basta, portanto, tomar $\delta = \epsilon$ para se ter $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ sempre que $|x - a| < \delta$. Neste caso foi possível encontrar um único δ que serve para qualquer $a \in \mathbb{R}$, e dizemos que g é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Definição 5.21 *Uma função f é* ***uniformemente contínua*** *num conjunto S se e somente se*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in S)(|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

A diferença essencial entre esta definição e a definição de continuidade em

S encontra-se na posição do quantificador existencial $\forall y$ (a troca de a por y é uma mudança de notação puramente cosmética). No caso da continuidade uniforme, um único δ serve para todo $y \in S$, ou seja, δ depende apenas de ϵ.

Exemplo 5.5.2

Dado $a > 0$, seja $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Então, para todos os $x, y \in [a,\infty)$ temos

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{xy} \leq \frac{|x-y|}{a^2}.$$

Basta escolher $\delta = a^2\epsilon$ para se ter $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ sempre que $|x - y| < \delta$. Portanto, $1/x$ é uniformemente contínua em qualquer intervalo $[a,\infty)$ com $a > 0$. No intervalo $(0,\infty)$ a função $1/x$ é contínua mas não é uniformemente contínua.

Apresentamos a seguir o resultado mais importante a respeito de continuidade uniforme.

Teorema 5.22 *Se f é contínua num intervalo compacto $I = [a,b]$, então f é uniformemente contínua em I.*

Demonstração. Argumentaremos pela contrapositiva. Suponha que f não é uniformemente contínua em I. Então,

$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x,y \in I)(|x-y| < \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon).$$

Portanto, para cada $\delta_n = 1/n$ existem $x_n, y_n \in I$ tais que $|x_n - y_n| < 1/n$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Pelo teorema de Bolzano-Weiertstrass, (x_n) e (y_n) possuem subsequências convergentes (x_{n_k}) e (y_{n_k}) que, além disso, convergem para o mesmo limite $c \in I$ porque, por construção, $|x_{n_k} - y_{n_k}| < 1/n_k \to 0$ para $k \to \infty$. No entanto, pelo menos uma das sequências $f(x_{n_k})$ ou $f(y_{n_k})$ não converge para $f(c)$. De fato, se tivéssemos $f(x_{n_k}) \to f(c)$ e $f(y_{n_k}) \to f(c)$ resultaria

$$\lim_{k\to\infty}\big(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big) = f(c) - f(c) = 0,$$

que contradiz $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, f não é contínua em I. ∎

A continuidade uniforme é importante, por exemplo, na teoria da integral de Riemann. Como veremos no Capítulo 6, é a continuidade uniforme que garante a integrabilidade das funções contínuas.

5.6 *Funções Diferenciáveis*

A noção de derivada é um dos pilares do cálculo diferencial e integral e da análise matemática, sem falar no papel crucial que desempenha na descrição do movimento.

Definição 5.23 *A função real f é **diferenciável em** a se*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

*existe. Neste caso, o limite é denotado por $f'(a)$ e chama-se **derivada de** f **em** a. Dizemos que f é **diferenciável** se f é diferenciável em todos os pontos do seu domínio.*

Evidentemente, para poder ser diferenciável em a a função f precisa estar definida em alguma vizinhança $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ de a. Por outro lado, note que, considerado como função de h, o quociente

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

não está definido em $h=0$. Isto explica por que o limite de uma função foi definido mesmo para pontos que podem não pertencer ao domínio da função. Derivadas à direita e à esquerda definem-se de modo análogo, considerando o limite quando h tende a zero por valores positivos ou negativos, conforme o caso.

Além de $f'(x)$, usa-se para a derivada de f em x a notação de Leibnitz, numa das forma abaixo:

$$\frac{df}{dx},\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{dy}{dx}.$$

Esta última é motivada pela forma tradicional $y=f(x)$ de se exprimir uma função. Usam-se também

$$\frac{df}{dx}(a),\ \frac{df(x)}{dx}(a),\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_a,\ \left.\frac{df}{dx}\right|_a,\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_a$$

para denotar $f'(a)$, o valor de derivada da função f no ponto particular a.

Deve-se notar que, na notação clássica de Leibnitz, expressões como dy/dx devem ser consideradas como um símbolo único que não pode ser desmembrado numa "fração" com "numerador" dy e "denominador" dx. Faz tanto sentido atribuir significados separados a dy e dx em dy/dx quanto atribuir significados separados a "fi" e "ta" na palavra "fita". A derivada é o limite de um quociente, não o quociente de duas "quantidades infinitesimais" dy e dx. Nos tempos heroicos em que o Cálculo estava na infância e a noção de limite não era bem entendida, Johann Bernoulli chegou a afirmar (Boyer 1949; Edwards, Jr. 1982) que "uma quantidade que é aumentada ou diminuída de uma quantidade infinitamente pequena não é aumentada nem diminuída." Em resposta a absurdos desse gênero, o filósofo e bispo George Berkeley, em tom de galhofa, dizia que os infinitésimos eram "fantasmas de quantidades falecidas" (*ghosts of departed quantities*). Uma quantidade infinitesimal supostamente seria um número diferente de zero porém de valor absoluto menor do que qualquer número real positivo, entidade obviamente inexistente na análise clássica, membro da família das mulas-sem-cabeça que soltam fogo pela boca e dos sacis de pernas cruzadas. O uso de quantidades infinitesimais na física, como no particionamente de uma distribuição contínua de carga em elementos de carga infinitesimais para o cálculo do potencial elétrico, é um procedimento heurístico, sugestivo, que torna mais curto o caminho para se chegar ao resultado correto definido rigorosamente pelo limite de uma soma (uma integral), mas não representa confirmação alguma da existência dos fantasmagóricos infinitésimos.[1]

Comentários semelhantes aplicam-se à notação usada para a integral. Na expressão tradicional

$$\int_a^b f(x)dx$$

1. A bem da verdade, tanto quantidades infinitesimais quanto infinitamente grandes podem ser definidas de modo logicamente consistente na chamada "análise não standard" (*nonstandard analysis*), inventada por Abraham Robinson na primeira metade da década de 1960. Essa análise não convencional tem angariado alguns adeptos mas, como o próprio nome indica, ainda ocupa uma posição marginal e está muito longe de conquistar a preferência dos matemáticos sobre a análise padrão ou análise clássica. Há um livro de cálculo diferencial e integral (J. Keisler, *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*) baseado na análise não standard que está disponível gratuitamente na Internet: http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html.

os símbolos $\int$ e dx não significam coisa alguma separadamente, emboram evoquem a imagem de uma soma dos valores de f multiplicados por incrementos da variável independente. A chamada "variável de integração" também é inteiramente supérflua. Para enfatizar isto, a notação moderna é simplesmente

$$\int_a^b f.$$

Uma das propriedades mais imediatas das funções diferenciáveis é a continuidade.

Teorema 5.24 *Se f é diferenciável em a então f é contínua em a.*

Demonstração. Com $h \neq 0$ podemos escrever

$$\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h = f'(a)\lim_{h\to 0}h = f'(a)0 = 0.$$

Portanto, com $x = a+h$, este resultado equivale a

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

e f é contínua em a. ∎

TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Suporemos conhecidas as regras de diferenciação e passaremos a discutir resultados que serão importantes para as aplicações futuras.

Definição 5.25 *Seja $f: X \to \mathbb{R}$ e $A \subset X$. Um ponto $x \in A$ é* ***ponto de máximo*** *de f em A se*

$$f(x) \geq f(y) \text{ para todo } y \in A.$$

O número $f(x)$ é o **valor máximo** *de f em A. O ponto $x \in A$ é* ***ponto de mínimo*** *de f em A se é ponto de máximo de $-f$. Neste caso, diz-se que $f(x)$ é o* **valor mínimo** *de f em A.*

Teorema 5.26 *Seja f definida em (a,b). Se é diferenciável em (a,b) e x é ponto de máximo ou de mínimo de f em (a,b), então $f'(x) = 0$.*

Demonstração. Seja x um ponto de máximo de f em (a,b). Se $x+h \in (a,b)$ e $h > 0$ temos $f(x+h) \leq f(x)$ e

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0 \implies f'(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0.$$

Se $x+h \in (a,b)$ e $h<0$ continuamos a ter $f(x+h) \leq f(x)$ mas, agora,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \implies f'(x) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

Portanto, $f'(x)=0$. Raciocínio análogo aplica-se ao caso em que x é ponto de mínimo. ▮

A diferenciabilidade de f em *todo* o intervalo (a,b) é indispensável. Para a função $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0<x\leq 1 \\ 2-x & \text{se } 1<x<2 \end{cases}$$

$x=1$ é ponto de máximo mas não se tem $f'(1)=0$ porque a derivada de f não existe em $x=1$.

O Teorema 5.26 serve de base para a demonstração de outros teoremas importantes.

Teorema 5.27 (Teorema de Rolle) *Se f é contínua no intervalo compacto $[a,b]$, é diferenciável em (a,b) e $f(a)=f(b)$, então existe um número $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.*

Demonstração. Como f é contínua em $[a,b]$, de acordo com o Teorema 5.19 f assume valores máximo e mínimo em $[a,b]$. Se o ponto de máximo ou o ponto de mínimo de f ocorre em $c\in(a,b)$, então $f'(c)=0$ pelo Teorema 5.26. Se os pontos de máximo e de mínimo ocorrem ambos nos extremos do intervalo $[a,b]$, resulta de $f(a)=f(b)$ que os valores máximo e mínimo de f são ambos iguais a $f(a)$, isto é, $f(x)\leq f(a)$ e $f(x)\geq f(a)$ para todo $x\in[a,b]$. Segue-se que f é constante em $[a,b]$ e $f'(c)=0$ para qualquer $c\in(a,b)$. ▮

Apressadamente poderíamos pensar que a condição de continuidade de f é redundante porque, de acordo com o Teorema 5.24, a diferenciabilidade de f em (a,b) implica sua continuidade em (a,b). No entanto, a continuidade de f no intervalo *fechado* $[a,b]$ é indispensável. A função $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } 0<x\leq 1 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

satisfaz $f(0) = f(1)$ e é diferenciável em $(0,1)$, mas sua derivada não se anula em nenhum ponto do intervalo $(0,1)$. O problema está na descontinuidade da função em $x = 0$.

O próximo teorema é tremendamente importante por suas inúmeras aplicações.

Teorema 5.28 (Teorema do Valor Médio) *Se f é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), então existe um número $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Demonstração. Geometricamente, este teorema afirma que a inclinação da tangente ao gráfico de f em algum ponto entre $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ é igual à inclinação do segmento de reta que conecta esses dois pontos. A ideia da demonstração é fabricar a partir de f uma função g à qual o teorema de Rolle possa ser aplicado. Para isto, é necessário que se tenha $g(a) = g(b)$. Se subtrairmos de $f(x)$ a ordenada em x do segmento de reta que passa pelos pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ resultará uma função que é zero em $x = a$ e $x = b$:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Então $g(a) = g(b) = 0$ e g é claramente contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). Logo, pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$, isto é,

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$ ∎

Corolário 5.29 *Se $f'(x) = 0$ para todo x num intervalo, então f é constante no intervalo.*

Demonstração. Pelo teorema do valor médio, para quaisquer dois pontos a e b do intervalo tem-se $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) = 0$. ∎

Corolário 5.30 *Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x num intervalo, então $f = g + C$ no intervalo para algum número C.*

Demonstração. Basta considerar a função $h = f - g$ e aplicar o corolário anterior. ∎

Corolário 5.31 *Se $f'(x) > 0$ para todo x num intervalo, então f é crescente no intervalo. Se $f'(x) < 0$ para todo x num intervalo, então f é decrescente no intervalo.*

Demonstração. Suponha que $f'(x) > 0$ para todo x num intervalo. Se a e b pertencem ao intervalo e $b > a$, pelo teorema do valor médio existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) > 0$ e f é crescente no intervalo. Se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) < 0$ e f é decrescente no intervalo. ∎

Cuidado! Se $f'(a) > 0$ (ou $f'(a) < 0$) não se pode concluir que f é crescente (ou decrescente) numa vizinhança de a, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 5.6.1

O contraexemplo clássico (Gelbaum & Olmsted 1992, p. 37) é a função

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Para $x \neq 0$ a derivada de f é calculada pelas regras usuais de derivação. Em $x = 0$, no entanto, tais regras são inúteis e precisamos recorrer à definição de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h + 2h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \left(1 + 2h \operatorname{sen} \frac{1}{h}\right) = 1.$$

Portanto, a derivada de f é

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - 2\cos \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

A derivada de f é positiva em $x = 0$ mas em qualquer vizinhança de zero $f'(x)$ assume tanto valores positivos quanto negativos, de modo que f não é crescente nem decrescente. Por exemplo, se $x_n = 1/2n\pi$ e $y_n = 1/(2n+1)\pi$ resulta que $f'(x_n) = -1$ e $f'(y_n) = 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, a derivada de f ao longo da sequência $1/m\pi$ salta infinitas vezes de -1 a 3 à medida que $m \to \infty$ conforme m passa por valores pares ou

ímpares. Como $f'(x)$ troca de sinal infinitas vezes à medida que x tende a zero, f não pode ser monótona em nenhuma vizinhança de $x = 0$.

A função deste último exemplo é diferenciável mas sua derivada é descontínua. É digno de nota, no entanto, que derivadas, mesmo que não sejam contínuas, sempre têm a propriedade do valor intermediário.

Teorema 5.32 (Darboux) *Seja f diferenciável no intervalo compacto $[a,b]$ e seja r um número tal que $f'(a) < r < f'(b)$. Então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = r$.*
Demonstração. Seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - rx$. Então a função g é diferenciável e $g'(x) = f'(x) - r$. A diferenciabilidade de f implica sua continuidade, de modo que g também é contínua. Portanto, g assume um valor mínimo em $[a,b]$. Comprova-se facilmente que $g'(a) \geq 0$ se o mínimo ocorre em a e $g'(b) \leq 0$ se o mínimo ocorre em b. No entanto, $g'(a) = f'(a) - r < 0$ e $g'(b) = f'(b) - r > 0$, donde segue-se que o mínimo só pode ocorrer em $c \in (a,b)$. Caso encerrado, pois o Teorema 5.26 garante que $g'(c) = 0$, ou seja, $f'(c) = r$. ∎

Uma consequência imediata deste resultado é que uma função que não desfruta da propriedade do valor intermediário não pode ser uma derivada.

Vejamos um exemplo muito simples de aplicação do teorema do valor médio num problema físico.

Exemplo 5.6.2
Se um objeto viaja ao longo de uma linha reta desde uma posição inicial no instante t_1 até uma posição final no instante t_2, existe um instante $\bar{t}$ entre os instantes t_1 e t_2 tal que a velocidade instantânea em $\bar{t}$ é igual à velocidade média no intervalo de tempo considerado. Demonstração: como a velocidade instantânea deve existir em cada instante, a posição x é uma função diferenciável do tempo; segundo o teorema do valor médio, existe $\bar{t}$ entre t_1 e t_2 tal que $x(t_2) - x(t_1) = \dot{x}(\bar{t})(t_2 - t_1)$, donde $v(\bar{t}) = (x(t_2) - x(t_1))/(t_2 - t_1) =$ velocidade média.

A diferenciação é também extremamente útil para o cálculo de limites de "formas indeterminadas", e suporemos conhecida a regra de L'Hôpital[2], ensinada nos cursos de Cálculo, e cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em Figueiredo (1996).

MÁXIMOS E MÍNIMOS

A determinação de máximos e mínimos de funções reais é um problema extremamente importante tanto por seu interesse matemático intrínseco quanto por suas inúmeras aplicações práticas.

Definição 5.33 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ com $X \subset \mathbb{R}$. Um ponto $a \in X$ é um* ***ponto de mínimo global*** *de f se $f(x) \geq f(a)$ para todo $x \in X$, e é um* ***ponto de máximo global*** *de f se $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in X$.*

Um máximo ou mínimo de uma função é chamado genericamente de **extremo** da função.

Exemplo 5.6.3
A função

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

tem um mínimo global em $x = -1$. De fato,

$$f(x) - f(-1) = \frac{2x}{1+x^2} + 1 = \frac{1+x^2+2x}{1+x^2} = \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \geq 0.$$

É importante distinguir extremo global — também chamado de extremo **absoluto** — de extremo local, também conhecido com extremo **relativo**.

Definição 5.34 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ com $X \subset \mathbb{R}$. Um ponto $a \in X$ é um* ***ponto de mínimo local*** *(**ponto de máximo local**) de f se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(a)$ $(f(x) \leq f(a))$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap X$.*

2. Ou L'Hospital, conforme a grafia da época do Marquês.

O estudo das derivadas de uma função é particularmente útil para a determinação de máximos e mínimos locais da função. Se a função é diferenciável, o Teorema 5.26 estabelece que sua primeira derivada é zero em cada ponto extremo, resultado que permite identificar candidatos a pontos extremos locais. Há um critério simples que garante que a função tem um extremo local.

Teorema 5.35 *Suponha que $f'(a) = 0$. Se $f''(a) > 0$, então f tem um mínimo local em a; se $f''(a) < 0$, então f tem um máximo local em a.*

Demonstração. Como $f'(a) = 0$, temos

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \frac{f'(a+h)}{h}.$$

Suponha que $f''(a) > 0$. Então $f'(a+h)/h > 0$ para $|h|$ suficientemente pequeno. Portanto:

$f'(a+h) > 0$ para h suficientemente pequeno e positivo;

$f'(a+h) < 0$ para h suficientemente pequeno (em módulo) e negativo.

Pelo Corolário 5.31, f é crescente em algum intervalo à direita de a e decrescente em algum intervalo à esquerda de a. Portanto, f tem um mínimo local em a. Argumentos análogos aplicam-se ao caso em que $f''(a) < 0$. ∎

Exemplo 5.6.4

Reconsideremos a função

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

do Exemplo 5.6.3. Temos

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = -\frac{4x(3-x^2)}{(1+x^2)^3},$$

donde $f'(-1) = 0$, $f''(-1) = 1$ e $f'(1) = 0$, $f''(1) = -1$. Pelo Teorema 5.35, $x = -1$ é ponto de mínimo local e $x = -1$ é ponto de máximo local. É fácil provar que $x = 1$ é também ponto de máximo global.

Vale ressaltar que se $f'(a) = 0$ e $f''(a) = 0$ **nada** se pode concluir sobre o comportamento de f numa vizinhança de a. Considere as funções $f(x) = x^4$,

$g(x) = -x^6$ e $h(x) = x^3$. Então $f'(0) = g'(0) = h'(0) = 0$ e $f''(0) = g''(0) = h''(0) = 0$, mas em $x = 0$ f tem um mínimo, g tem um máximo e h tem um ponto de inflexão.

É importante observar também que as condições do Teorema 5.35 não são necessárias, mas são apenas *suficientes* para um extremo local em a, e exigem a existência da primeira e da segunda derivadas da função em a. A existência de extremo local pode ser assegurada sob condições muito mais brandas, que não requerem sequer que a primeira derivada exista em a (Problema 5.15).

Leituras Adicionais Selecionadas[3]

Ávila, G. 1999 *Introdução à Análise Matemática*.

• Courant, R. e John, F. 1999 *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. I.

Figueiredo, D. G. 1996 *Análise I*.

Johnsonbaugh, R. e Pfaffenberger, W. E. 2002 *Foundations of Mathematical Analysis*.

Kitchen, Jr., J. W. 1968 *Calculus of One Variable*.

Lima, E. L. 2004 *Curso de Análise*, Vol. 1.

• Spivak, M. 1994 *Calculus*.

Problemas

5.1. Prove diretamente, usando épsilons e deltas, que a função $x \mapsto \sqrt{x}$ é contínua em $[0,\infty)$.

5.2. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}.$$

Prove que f só é contínua em $x = 0$.

5.3. Seja f contínua em todos os pontos de $[a,b]$ e suponha que $f(x) = 0$ se x é racional. Prove que $f(x) = 0$ para todo x em $[a,b]$

3. A lista completa de referências, com plenos detalhes bibliográficos, encontra-se na Bibliografia no fim do livro. O símbolo • destaca obras cuja leitura é altamente recomendada.

5.4. Seja f contínua em $\mathbb{R}$ e suponha que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = ax$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Sugestão: prove primeiro que $f(n) = nf(1)$ para $n \in \mathbb{N}$ e estenda este resultado para $n \in \mathbb{Q}$. Para seu governo, a equação funcional $f(x+y) = f(x) + f(y)$ admite soluções descontínuas (Gelbaum & Olmsted 1992). A construção de uma função linear descontínua utiliza-se das chamadas bases de Hamel, cuja existência só pode ser estabelecida invocando o axioma da escolha (Haaser & Sullivan 1991).

5.5. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1-x & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases} .$$

Prove que:
(a) $f(f(x)) = x$ para todo $x \in [0,1]$;
(b) $f(x) + f(1-x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$;
(c) f só é contínua em $x = 1/2$;
(d) f assume todos os valores em $[0,1]$.

5.6. Seja f uma função real contínua no intervalo compacto $[a,b]$. Suponha que $f(a) \leq a$ e $f(b) \geq b$. Prove que f possui um *ponto fixo* em $[a,b]$, isto é, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$. Sugestão: considere a função $g(x) = f(x) - x$.

5.7. Prove que a equação $x = \cos x$ possui uma solução no intervalo $(0, \pi/2)$. Prove que não há outra solução real.

5.8. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua numa vizinhança de $x = a$, $f'(x)$ existe para $x \neq a$ e tem-se $\lim_{x \to a} f'(x) = b$, então f é diferenciável em $x = a$ e $f'(a) = b$.

5.9. Suponha que f' existe e é limitada em $\mathbb{R}$. Prove que f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

5.10. Dada a fórmula

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1,$$

encontre, por diferenciação, fórmulas para:
(a) $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$; (b) $1^2 x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + \ldots + n^2 x^n$.

5.11. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \le c \\ ax+b & \text{se } x > c \end{cases}$$

onde a,b,c são constantes. Se c é dado, determine os valores de a e b para os quais f é diferenciável em $\mathbb{R}$.

5.12. Para todos os números reais x,y, prove que:
(a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \le |x-y|$; (b) $|\cos x - \cos y| \le |x-y|$.

5.13. (a) Prove que se f e g são uniformemente contínuas num conjunto S, também o são as funções $f+g$ e cf, onde c é uma constante. (b) Prove que a função $x \mapsto x^2$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. Conclua que a função produto de duas funções uniformemente contínuas não precisa ser uniformemente contínua.

5.14. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^{4/3}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

(a) Mostre que f é diferenciável em toda a reta real. (b) Mostre que f' não é limitada em $[0,1]$.

5.15. (a) O gráfico sugere que uma função f tem um extremo em a se f' tem sinais opostos imediatamente à esquerda e imediatamente à direita de a. Mais precisamente, prove que as duas condições a seguir são *suficientes* para que f tenha um mínimo local em a:
(i) f é contínua em a;
(ii) existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) > 0$ para $a < x < a+\delta$ e $f'(x) < 0$ se $a-\delta < x < a$.
Note que a derivada de f em a não precisa existir. Condições suficientes para um máximo são obtidas invertendo o sentido das desigualdades para $f'(x)$. (b) Use este critério para mostrar que a função definida por $f(x) = 1/(1-|x|)$ para $x \ne \pm 1$ tem um mínimo local em $x=0$. (c) Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2+\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

tem um mínimo local em $x = 0$, mas não se tem $f' < 0$ imediatamente à esquerda de 0 nem $f' > 0$ imediatamente à direita de 0. Isto viola o resultado do item (a)?

5.16. Suponha que $f(0) = g(0)$ e $f'(x) \leq g'(x)$ para todo $x \geq 0$. Prove que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq 0$. Interprete este resultado em termos do movimento de duas partículas ao longo de uma linha reta.

5.17. Se $f(x) = x$ para x racional e $f(x) = -x$ para x irracional, prove que $\lim_{x\to a} f(x)$ só existe se $a = 0$.

5.18. (a) Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ não existem, é possível que $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$ ou $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ existam?
(b) Se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ existe, necessariamente $\lim_{x\to a} g(x)$ existe?
(c) Se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ existe, necessariamente $\lim_{x\to a} g(x)$ existe?
(d) Se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e $\lim_{x\to a} g(x)$ não existe, é possível que $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$ exista?
(e) Se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e $\lim_{x\to a} g(x)$ não existe, é possível que $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ exista?

5.19. (a) Se f é tal que $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$ não existe qualquer que seja a função g para a qual $\lim_{x\to a} g(x)$ não existe, prove que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. (b) Suponha que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e é diferente de zero. Prove que se $\lim_{x\to a} g(x)$ não existe, então $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ também não existe. (c) Prove o mesmo resultado se $\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$.

5.20. Seja f tal que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ quaisquer que sejam $x,y \in \mathbb{R}$. Prove que se f é contínua em 0, então f é contínua em a para todo $a \in \mathbb{R}$.

5.21. (a) Se f é contínua em a, prove que $|f|$ também é contínua em a. A recíproca é verdadeira? (b) Prove que se f e g são contínuas, então $\max\{f,g\}$ e $\min\{f,g\}$ também são contínuas.

5.22. Prove que existe algum número real x tal que

$$x^{97} + \frac{120}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 \pi x} = 79 .$$

5.23. Determine $f'(0)$ para a função

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

sabendo que $g(0) = g'(0) = 0$.

5.24. A função f é *lipschitziana de ordem* α em x se existe $C > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}$$

para todo y nalgum intervalo em torno de x. A função é *lipschitziana de ordem α num intervalo* se a desigualdade acima vale para todos os x,y no referido intervalo. (a) Prove que f é contínua em x se f é lipschitziana de ordem $\alpha > 0$ em x. (b) Prove que f é uniformemente contínua num intervalo se f é lipschitziana de ordem $\alpha > 0$ no referido intervalo. (c) Prove que se f é diferenciável em x, então f é lipschitziana de ordem 1 em x. A recíproca é verdadeira? (d) Se f é diferenciável em $[a,b]$ segue-se que f é lipschitziana de ordem 1 em $[a,b]$? (e) Prove que se f é lipschitziana de ordem $\alpha > 1$ em $[a,b]$, então f é constante em $[a,b]$.

5.25. Se f é diferenciável em a, prove que $|f|$ também é diferenciável em a desde que $f(a) \neq 0$. Apresente um contraexemplo para o caso em que $f(a) = 0$.

5.26. Dadas duas funções f e g, prove que, sob condições apropriadas, vale o **teorema do valor médio generalizado de Cauchy**:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \quad c \in (a,b).$$

Note que este resultado reduz-se ao teorema do valor médio quando $g(x) = x$.

5.27. Sejam f e g contínuas em $[a,b]$ e diferenciáveis em (a,b), com $g'(x) \neq 0$ para todo x em (a,b). Prove que existe algum $x \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(b) - g(x)}.$$

Sugestão: elimine os denominadores para entender melhor o que isto significa.

5.28. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

com $g(0) = g'(0) = 0$ e $g''(0) = 10$. Prove que $f'(0)$ existe e determine seu valor. Se necessário, use a regra de L'Hôpital.

5.29. Prove que a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x\cos(\ln x) - x\,\text{sen}(\ln x) & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é crescente em $[0,1]$, embora tenha-se $f'(x) = 0$ para uma infinidade de valores de x. Esta função é diferenciável em $x = 0$?

5.30. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ números reais distintos entre si. Prove que

$$a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + a_n e^{\alpha_n x} = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

se e somente se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

6

Integral de Riemann

A integral de Riemann resolve o problema de definir a área sob o gráfico de uma função limitada num intervalo limitado da reta real.

6.1 *A Integral Como Limite de Somas*

Deve-se a Cauchy a definição precisa da integral definida de uma função contínua num intervalo limitado como limite de uma soma obtida pela subdivisão do intervalo. Essa é a definição mais elementar de integral, que costuma ser adotada nos livros de Cálculo. Riemann relaxou a condição de continuidade e estendeu a noção de integral a funções meramente limitadas, deixando claro que integrabilidade e continuidade são noções distintas.

Definição 6.1 *Por **partição** P do intervalo limitado $[a,b]$ entende-se um conjunto finito de pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tais que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{6.1}$$

Escrevemos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ i = 1, \ldots, n \tag{6.2}$$

***e definimos a norma da partição** $||P||$ como o comprimento do maior de todos os subintervalos:*

$$||P|| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}. \tag{6.3}$$

Se f é uma função limitada em $[a,b]$, para cada partição P de $[a,b]$ definimos a **soma de Riemann**

$$S(P,f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{6.4}$$

onde $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Dizemos que f é integrável à Riemann em $[a,b]$ se existe o limite da soma de Riemann $S(P,f)$ quando $||P||$ tende a zero e o limite é independente da escolha dos pontos ξ_i de cada subintervalo.

6.2 *Integrais Inferior e Superior*

Uma definição equivalente e mais frutífera é obtida aproximando a área por excesso e por falta. Se, à medida que forem cada vez mais refinadas, essas aproximações convergirem para o mesmo valor, a integral existe e seu valor é igual ao limite comum das aproximações por excesso e por falta. A tradução dessa ideia em forma matematicamente rigorosa deve-se a diversos matemáticos, entre os quais destacam-se Gaston Darboux, Giuseppe Peano e Vito Volterra.

Definição 6.2 *Se f é uma função limitada em $[a,b]$, para cada partição P de $[a,b]$ definimos*

$$M_i = \sup\{f(x)|x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad m_i = \inf\{f(x)|x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \tag{6.5}$$

$$\overline{I}(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad \underline{I}(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \tag{6.6}$$

*e, finalmente, definimos a **integral superior***

$$\overline{\int_a^b} f = \inf \overline{I}(P,f) \tag{6.7}$$

*e a **integral inferior***

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \underline{I}(P,f), \tag{6.8}$$

onde o supremo e o ínfimo são tomados sobre todas as partições P de $[a,b]$.

O significado geométrico da **soma superior** $\overline{I}(P,f)$ e da **soma inferior** $\underline{I}(P,f)$ está indicado na Fig. 6.1.
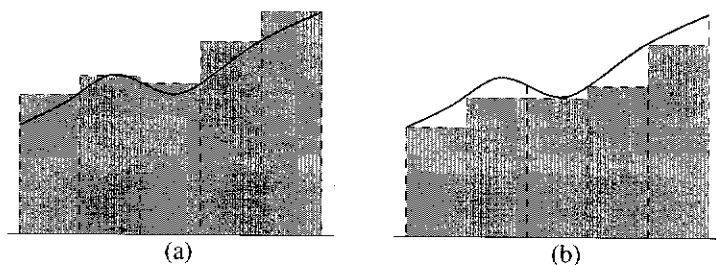
Fig. 6.1 *A área cinzenta em (a) representa a soma superior* $\overline{I}(P,f)$*; em (b), a área cinzenta representa a soma inferior* $\underline{I}(P,f)$.

Definição 6.3 *Se as integrais superior e inferior são iguais, dizemos que f é integrável à Riemann (ou $\mathscr{R}$-integrável) em $[a,b]$ e representamos o valor comum de* (6.7) *e* (6.8) *por*

$$\int_a^b f \tag{6.9}$$

ou por

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.10}$$

Intuitivamente, se a menor das aproximações por excesso coincide com a maior das aproximações por falta, a integral existe, é igual a esse valor comum e *define* a área sob o gráfico da função.

Como neste capítulo utilizaremos apenas a integral de Riemann, uma função $\mathscr{R}$-integrável será dita simplesmente integrável.

A letra usada para indicar a variável de integração é totalmente irrelevante:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \cdots. \tag{6.11}$$

Por outro lado, para evitar confusões ou ambiguidades, sempre que os limites de integração são variáveis a letra usada para representar a variável de integração deve ser diferente das letras usadas para denotar os limites de integração. Quando o integrando é uma função de duas ou mais variáveis, a notação

tradicional permanece indispensável para indicar a variável em relação à qual o processo de integração é aplicado, tal como em

$$\int_a^b f(x,y)\,dy.$$

As integrais superior e inferior sempre existem. De fato, como f é limitada, existem números m e M tais que

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]. \tag{6.12}$$

Segue-se que, para toda partição P,

$$m(b-a) \leq \underline{I}(P,f) \leq \overline{I}(P,f) \leq M(b-a). \tag{6.13}$$

Portanto, os números $\overline{I}(P,f)$ e $\underline{I}(P,f)$ formam conjuntos limitados de números reais, cujos supremos e ínfimos existem.

A Fig. 6.1 sugere que, à medida que o intervalo $[a,b]$ é dividido em subintervalos cada vez mais finos, a soma inferior aumenta e a soma superior diminui.

Definição 6.4 *Uma partição P^* é dita um **refinamento** da partição P se $P \subset P^*$, isto é, se todo ponto de P é ponto de P^*. Dadas duas partições P_1 e P_2, diz-se que $P^* = P_1 \cup P_2$ é o seu **refinamento comum**.*

Lema 6.5 *Se P^* é um refinamento de P, então*

$$\underline{I}(P^*,f) \geq \underline{I}(P,f) \tag{6.14}$$

e

$$\overline{I}(P^*,f) \leq \overline{I}(P,f). \tag{6.15}$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que P^* contém apenas um ponto a mais que P. Seja x^* tal ponto. Temos $x_{i-1} < x^* < x_i$ para algum i, onde x_{i-1} e x_i são dois pontos consecutivos de P. Se w_1 e w_2 são definidos por

$$w_1 = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x^*\} \quad \text{e} \quad w_2 = \inf\{f(x) \mid x^* \leq x \leq x_i\},$$

é claro que $w_1 \geq m_i$ e $w_2 \geq m_i$, onde $m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\underline{I}(P^*,f) - \underline{I}(P,f) &= w_1(x^* - x_{i-1}) + w_2(x_i - x^*) - m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= (w_1 - m_i)(x^* - x_{i-1}) + (w_2 - m_i)(x_i - x^*) \geq 0.\end{aligned}$$

Repetindo este argumento para cada ponto adicional de P^* obtemos (6.14). A demonstração de (6.15) é inteiramente análoga. ∎

Intuitivamente, nenhuma soma superior pode ser menor do que qualquer soma inferior. Isto é confirmado pelo teorema abaixo.

Teorema 6.6 *Sejam P_1 e P_2 partições de $[a,b]$ e seja f uma função limitada em $[a,b]$. Então*

$$\underline{I}(P_1,f) \leq \overline{I}(P_2,f). \tag{6.16}$$

Demonstração. Seja $P = P_1 \cup P_2$ o refinamento comum de P_1 e P_2. Pelo Lema 6.5,

$$\underline{I}(P_1,f) \leq \underline{I}(P,f) \leq \overline{I}(P,f) \leq \overline{I}(P_2,f).$$ ∎

Corolário 6.7 *Se f é uma função limitada num intervalo compacto $[a,b]$, então*

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f. \tag{6.17}$$

Demonstração. Tomando o supremo sobre todas as partições P_1 em (6.16) obtém-se

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{I}(P_2,f).$$

Tomando agora o ínfimo sobre todas as partições P_2 resulta (6.17). ∎

A questão da igualdade das integrais superior e inferior é mais delicada. Presumivelmente, toda função contínua é integrável. Para provar que de fato é este o caso, usaremos um resultado importante.

Teorema 6.8 (Critério de Riemann) *A função f é integrável em $[a,b]$ se e somente se para cada $\epsilon > 0$ existe uma partição P de $[a,b]$ tal que*

$$\overline{I}(P,f) - \underline{I}(P,f) < \epsilon. \tag{6.18}$$

Demonstração. Para qualquer partição P é imediato das definições de supremo e ínfimo que

$$\underline{I}(P,f) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \overline{I}(P,f). \tag{6.19}$$

Portanto, a condição de Riemann (6.18) implica

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \epsilon. \tag{6.20}$$

Como isto vale para todo $\epsilon > 0$, temos

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f, \tag{6.21}$$

ou seja, f é integrável. Suponha, agora, que f seja integrável e seja dado $\epsilon > 0$. Então, por causa das definições de supremo e ínfimo, existem partições P_1 e P_2 tais que

$$\underline{I}(P_1,f) > \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} \quad e \quad \overline{I}(P_2,f) < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}. \tag{6.22}$$

Seja P o refinamento comum de P_1 e P_2. Pelo Lema 6.5, temos

$$\overline{I}(P,f) \leq \overline{I}(P_2,f) < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} \quad e \quad \underline{I}(P,f) \geq \underline{I}(P_1,f) > \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2}, \tag{6.23}$$

donde

$$\overline{I}(P,f) - \underline{I}(P,f) < \epsilon, \tag{6.24}$$

o que completa a demonstração. ∎

Teorema 6.9 *Se f é contínua em $[a,b]$ então f é integrável em $[a,b]$.*

Demonstração. Se f é contínua em $[a,b]$ segue-se que f é uniformemente contínua em $[a,b]$ pelo Teorema 5.22, de modo que existe $\delta > 0$ tal que, para $x,y \in [a,b]$,

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \quad \text{se} \quad |x-y| < \delta. \tag{6.25}$$

Seja P uma partição de $[a,b]$ com $||P|| < \delta$. Conforme (6.25), a diferença entre os valores de f em dois pontos distintos de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é limitada e temos

$$M_i - m_i \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} < \frac{\epsilon}{b-a}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6.26}$$

Portanto,

$$\overline{I}(P,f) - \underline{I}(P,f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon . \tag{6.27}$$

Pelo Teorema 6.8, f é integrável. ∎

Prova-se sem grandes dificuldades que a integral de Riemann goza da propriedade de linearidade: se f e g são integráveis em $[a,b]$ e $c \in \mathbb{R}$ então $f+g$ e cf são integráveis e tem-se

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{e} \quad \int_a^b cf = c\int_a^b f . \tag{6.28}$$

Seja $a < c < b$. Prova-se que se f é integrável em $[a,b]$ então f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$. Reciprocamente, se f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$ então f é integrável em $[a,b]$. Além disso, se f é integrável em $[a,b]$ tem-se

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f . \tag{6.29}$$

Como a integral $\int_a^b f\,dx$ só foi definida para $b > a$, é conveniente introduzir as *definições*

$$\int_a^a f = 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b f = -\int_b^a f \text{ se } a > b. \tag{6.30}$$

Isto torna a equação (6.29) válida quaisquer que sejam a,b,c.

Outro resultado importante — que deixaremos para você provar no Problema 6.2 — é o seguinte: se f e g são integráveis em $[a,b]$, então fg também é integrável em $[a,b]$. Desde que g obedeça a condições adicionais apropriadas, f/g é igualmente integrável em $[a,b]$.

A coleção das funções integráveis é extensa, mas também há funções não integráveis em abundância. Um exemplo é a função de Dirichlet definida no Exemplo 5.3.2, que não é integrável em nenhum intervalo $[a,b]$. Como em qualquer intervalo há números racionais e irracionais, para a função de Dirichlet $m_i = 0$ e $M_i = 1$, de modo que qualquer soma superior é igual a $b-a$ e qualquer soma inferior é zero. Portanto, a integral superior é $b-a$ e a integral inferior é zero, de modo que f_D não é integrável.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

A integral de Riemann só é definida para funções limitadas num intervalo limitado. Se alguma dessas condições falhar, pode ainda ser possível definir uma integral imprópria como limite de integrais de Riemann. No caso de intervalo ilimitado, se $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ existe define-se

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad 6.31$$

Analogamente,

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)dx \qquad 6.32$$

se o limite existir. A integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existe se e somente se $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ e $\int_a^{\infty} f(x)dx$ existem para cada $a \in \mathbb{R}$ e, neste caso,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx. \qquad 6.33$$

Convença-se de que o segundo membro desta última equação não depende de a.

Se f não for limitada num intervalo limitado, procede-se de modo semelhante, considerando o intervalo de interesse como limite de intervalos nos quais f é limitada. Por exemplo,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0+} 2\left(\sqrt{1} - \sqrt{\epsilon}\right) = 2. \qquad 6.34$$

6.3 *Relação Entre Derivada e Integral*

Uma das grandes descobertas de Newton e Leibnitz foi a de que o problema das quadraturas é o inverso do problema das tangentes.

Teorema 6.10 (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo)
Seja f integrável em $[a,b]$. Se $a \leq x \leq b$ seja

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad 6.35$$

Então F é contínua em $[a,b]$. Ademais, se f é contínua no ponto c de $[a,b]$, F é diferenciável em c e

$$F'(c) = f(c). \tag{6.36}$$

Se $c = a$ ou $c = b$, $F'(c)$ denota a derivada à direita ou a derivada à esquerda, conforme o caso.

Demonstração. Como f é integrável segundo Riemann, f é limitada. Portanto, existe $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$ para todo $a \leq t \leq b$. Se $a \leq x \leq y \leq b$ ou $a \leq y \leq x \leq b$ temos

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq M|y-x|. \tag{6.37}$$

Dado $\epsilon > 0$, basta escolher $\delta = \epsilon / M$ para que se tenha $|F(y) - F(x)| < \epsilon$ sempre que $|y - x| < \delta$. Isto prova não apenas a continuidade, mas a continuidade uniforme de F em $[a,b]$. Suponhamos agora que f seja contínua em c. Dado $\epsilon > 0$ escolhamos $\delta > 0$ tal que

$$|f(t) - f(c)| < \epsilon \tag{6.38}$$

se $|t - c| < \delta$ com $a \leq t \leq b$. Portanto, se $|h| < \delta$ temos

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} [f(t) - f(c)]dt\right| < \frac{1}{|h|}\epsilon|h| = \epsilon. \tag{6.39}$$

Este resultado permanece válido nos pontos extremos do intervalo (deve-se tomar $h > 0$ ou $h < 0$, conforme o caso) e dele se conclui que $F'(c) = f(c)$. ∎

A continuidade do integrando em c é indispensável para que F seja diferenciável em c. Por exemplo, seja f definida em $[-1,1]$ por $f(x) = 0$ se $x < 0$ e $f(x) = 1$ se $x \geq 0$. Então f é integrável em $[-1,1]$ e $F(x) = \int_{-1}^x f(x)dx$ é tal que $F(x) = 0$ se $x < 0$ e $F(x) = x$ se $x \geq 0$, que não é diferenciável em $x = 0$, pois as derivadas à esquerda e à direita são diferentes.

O Teorema 6.10 tem um corolário que é rotineiramente usado no cálculo de integrais.

Corolário 6.11 (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo)
Se f é contínua em $[a,b]$ e $f = g'$ para alguma função g, então

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a). \tag{6.40}$$

Demonstração. Seja

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{6.41}$$

Pelo Teorema 6.10, $F' = f = g'$ em $[a,b]$. Logo, existe um número C tal que $F(x) = g(x) + C$ para todo x em $[a,b]$. Como $F(a) = 0$, segue-se que $C = -g(a)$. Assim, $F(x) = g(x) - g(a)$ e

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = g(b) - g(a), \tag{6.42}$$

o que completa a demonstração. ∎

O segundo teorema fundamental do Cálculo vale sob condições menos restritivas: f não precisa ser contínua, basta ser integrável (Problema 6.10).

É comum estudantes saírem de um curso de Cálculo com a impressão de que a integral não tem existência independente, mas é meramente a inversa da derivada — a antiderivada —, e que a equação (6.40) representa a definição de integral: $\int_a^b f = g(b) - g(a)$ onde g é uma função cuja derivada é f. Isto, evidentemente, não é verdade, pois existem funções integráveis que não são derivada de nenhuma função. Por exemplo, a função f definida por $f(0) = 1$ e $f(x) = 0$ se $x \neq 0$ é integrável em qualquer intervalo, e sua integral é zero. Se existisse g tal que $f(x) = g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, teríamos $g(x) = C_1$ para $x > 0$ e $g(x) = C_2$ para $x < 0$, onde C_1 e C_2 são constantes. Como a derivada de g existe em qualquer ponto, g é contínua. Isto requer $C_1 = C_2 = C$ e $g(0) = C$. Portanto, g é constante sobre toda a reta real e sua derivada é identicamente nula, em contradição com $g'(0) = f(0) = 1$. Nem mesmo a existência de uma primitiva garante a validade de Eq.(6.40): o matemático italiano Vito Volterra construiu uma função diferenciável $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, com g' limitada, para a qual $\int_0^1 g'(x)dx \neq g(1) - g(0)$ porque g' não é integrável (Hawkins 1975, p. 57).

Integral Como Limite de Somas

Vejamos, finalmente, a equivalência entre a definição de integral em termos das integrais superior e inferior e a definição tradicional como limite de somas. Reconsideremos a soma de Riemann $S(P,f)$ definida pela Eq. (6.4).

Teorema 6.12 *(a) Se existe o limite de $S(P,f)$ quando $||P||$ tende a zero, então f é integrável e*

$$\lim_{||P||\to 0} S(P,f) = \int_a^b f(x)dx. \tag{6.43}$$

(b) Se f é integrável então (6.43) *vale.*

Demonstração. Provaremos apenas a parte (a); vide Lima (2004) para uma demonstração da parte (b). Suponhamos que exista o limite de $S(P,f)$ quando $||P||$ tende a zero e que seu valor seja A. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $||P|| < \delta$ implica

$$A - \frac{\epsilon}{4} < S(P,f) < A + \frac{\epsilon}{4} \tag{6.44}$$

quaisquer que sejam os pontos intermediários ξ_i. Escolhamos esta partição P. Fazendo variar os números ξ_i sobre os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ e tomando o supremo e o ínfimo dos números $S(P,f)$, resulta

$$A - \frac{\epsilon}{4} \le \underline{I}(P,f) \le \overline{I}(P,f) \le A + \frac{\epsilon}{4}. \tag{6.45}$$

Consequentemente,

$$\overline{I}(P,f) - \underline{I}(P,f) \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \tag{6.46}$$

o que prova que f é integrável pelo critério de Riemann. Portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = \inf \overline{I}(P,f) \ge A - \frac{\epsilon}{4} \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)dx = \sup \underline{I}(P,f) \le A + \frac{\epsilon}{4}, \tag{6.47}$$

donde

$$-\frac{\epsilon}{4} \le A - \int_a^b f(x)dx \le \frac{\epsilon}{4}, \tag{6.48}$$

Como isto é válido para todo $\epsilon > 0$, segue-se que $A = \int_a^b f(x)dx$. ∎

6.4 *Teoremas do Valor Médio Para Integrais*

Como temos visto, o teorema do valor médio do cálculo diferencial é extremamente útil para fazer estimativas e limitações de funções diferenciáveis. Há resultados análogos para integrais que também são de utilidade em diversas circunstâncias.

Teorema 6.13 (Teorema do valor médio generalizado para integrais) *Se f é contínua em $[a,b]$ e g é integrável e não muda de sinal em $[a,b]$, então existe um ponto c tal que $a \le c \le b$ e*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{6.49}$$

Demonstração. Podemos supor que $g \geq 0$ em $[a,b]$ (por quê?). Como existem m e M tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo x em $[a,b]$, temos $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ para todo $x \in [a,b]$, donde

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{6.50}$$

Se $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ segue-se que $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ e a equação (6.49) é satisfeita para qualquer $c \in [a,b]$. Se $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ temos

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M \tag{6.51}$$

e o teorema do valor intermediário garante a existência de $c \in [a,b]$ para o qual

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}, \tag{6.52}$$

o que completa a demonstração. ∎

Este teorema possui um corolário muito útil.

Corolário 6.14 (Teorema do valor médio para integrais) *Se f é contínua em $[a,b]$, existe um ponto $c \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a). \tag{6.53}$$

6.5 *Fórmula de Taylor*

A fórmula de Taylor é extremamente importante e serve de base para a expansão de funções em séries de potências. A estimativa do resto na fórmula de Taylor propicia uma aplicação interessante do teorema do valor médio generalizado para integrais.

Definição 6.15 *Uma função f é dita* **de classe** *C^n se as derivadas $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ existem e são contínuas em todos os pontos do domínio da função. Uma função é dita* **de classe** *C^∞ se suas derivadas de todas as ordens existem.*

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Então, se $x \in [a,b]$ temos

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt,$$

pelo teorema fundamental do cálculo. Podemos fazer aparecer a segunda derivada de f na expressão acima para $f(x)$ fazendo uma integração por partes engenhosa com a ajuda da função $g(t) = x - t$, que satisfaz $g'(t) = -1$ (derivada em relação a t com x fixo). Então,

$$\begin{aligned}
f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt &= f(a) - \int_a^x f'(t)(x-t)'\,dt \\
&= f(a) - f'(t)(x-t)\Big|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t)\,dt
\end{aligned}$$

Se f é de classe C^3,

$$\begin{aligned}
\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt &= -\int_a^x f''(t)\Big[\frac{(x-t)^2}{2}\Big]'\,dt \\
&= -\frac{(x-t)^2}{2} f''(t)\Big|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt \\
&= f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt,
\end{aligned}$$

donde

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt.$$

Por indução, temos um importante resultado.

Teorema 6.16 (Fórmula de Taylor com Resto Integral) *Se f é de classe C^{n+1} em $[a,b]$, então*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

onde

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

é chamado de ***resto****.*

Definição 6.17 *Se f possui derivadas até a de enésima ordem no ponto a, o polinômio*

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

chama-se ***polinômio de Taylor de ordem n em torno de a*** *associado a f.*

Quanto menor o resto, mais bem a função é aproximada por seu polinômio de Taylor. Se o resto

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

então a **série de Taylor**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

converge para $f(x)$ e podemos escrever

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Há diversas formas de expressar o resto $R_n(x)$ que facilitam a tarefa de estimar o erro cometido ao se aproximar $f(x)$ por seu polinômio de Taylor de grau n.

Teorema 6.18 (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange) *Se f é de classe C^{n+1} em $[a,b]$, então*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

onde

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c)\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

para algum $c \in [a,x]$. Esta expressão para $R_n(x)$ chama-se ***forma de Lagrange*** *do resto.*

Demonstração. Tome $g(t) = x - t$ e aplique o Teorema 6.13 à integral $\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ que aparece na forma integral de $R_n(x)$ dada no Teorema 6.16. ▮

Exemplo 6.5.1

A série de Taylor de $\operatorname{sen} x$ converge para $\operatorname{sen} x$. Para provar isto, notemos inicialmente que as derivadas do seno alternam-se entre o seno e o cosseno, logo jamais ultrapassam 1 em valor absoluto. Portanto

$$|R_n(x)| = |\operatorname{sen}^{(n+1)}(c)|\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

para algum $c \in [a,x]$. Mas a sequência $b^n/n!$ converge para zero qualquer que seja $b > 0$ (Problema 4.3), de modo que $R_n(x) \to 0$ e, para todo $x \in \mathbb{R}$, a série de Taylor de $\operatorname{sen} x$ converge para $\operatorname{sen} x$.

Um alerta final: o fato de a série de Taylor de $f(x)$ convergir não assegura por si só que a série converge para $f(x)$.

Exemplo 6.5.2

Um contraexemplo clássico é a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}. \tag{6.54}$$

Não é difícil mostrar que todas as derivadas de f são nulas em $x = 0$ (basta calcular as derivadas à direita porque f é uma função par). Portanto, a série de Taylor de f com $a = 0$ converge para zero para todo x, logo não converge para f exceto no ponto $x = 0$: a função identicamente nula e f têm a mesma série de Taylor. Note que esta função nada tem de irregular, ao contrário, ela é regularíssima pois é de classe C^∞ sobre toda a reta real. Certas funções obtidas a partir desta desempenham um papel importante na teoria das distribuições e, na geometria diferencial, servem de base para a construção das chamadas partições da unidade.

Este exemplo desempenhou um papel histórico saliente (Dunham 2005). Quando a noção de limite ainda não era bem compreendida, Lagrange, a fim de evitar as quantidades infinitesimais (os embaraçosos "fantasmas de quantidades falecidas"), propôs definir as derivadas de uma função a partir

da sua expansão em série de potências. A função (6.54) foi apresentada por Cauchy para mostrar que a proposta de Lagrange era insustentável, uma vez que funções infinitamente diferenciáveis podem não admitir uma expansão em série de potências.

6.6 *A Integral de Riemann-Stieltjes*

A integral de Riemann é uma espécie de média ponderada dos valores da função f num intervalo em que os pesos são os comprimentos dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. A integral de Riemann-Stieltjes é uma generalização da integral de Riemann em que os pesos são mais gerais do que os comprimentos dos subintervalos.

Definição 6.19 *Seja f uma função limitada no intervalo limitado $[a,b]$ e seja α uma função crescente em $[a,b]$. Para cada partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ definimos*

$$M_i = \sup\{f(x) | x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad m_i = \inf\{f(x) | x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \tag{6.55}$$

$$\overline{I}(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})], \quad \underline{I}(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \tag{6.56}$$

*e, finalmente, definimos a **integral superior de f em relação a α***

$$\overline{\int_a^b} f \, d\alpha = \inf \overline{I}(P, f, \alpha) \tag{6.57}$$

*e a **integral inferior de f em relação a α***

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha = \sup \underline{I}(P, f, \alpha), \tag{6.58}$$

onde o supremo e o ínfimo são tomados sobre todas as partições P de $[a,b]$.

Definição 6.20 *Se as integrais superior e inferior de f em relação a α são iguais, dizemos que f é integrável à Riemann-Stieltjes relativamente a α em $[a,b]$, e representamos o valor comum de (6.57) e (6.58) por*

$$\int_a^b f \, d\alpha \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x) \, d\alpha(x). \tag{6.59}$$

Note que a função α não precisa nem sequer ser contínua. Obviamente, se $f = 1$ tem-se

$$\int_a^b d\alpha = \alpha(b) - \alpha(a) . \qquad 6.60$$

Exemplo 6.6.1

Considere um intervalo $[a,b]$ que *contenha a origem como ponto interior*, isto é, $a < 0$ e $b > 0$. Seja θ a *função degrau de Heaviside* definida por[1]

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} . \qquad 6.61$$

Se f é contínua em $x = 0$ temos

$$\int_a^b f(x) d\theta(x) = f(0) . \qquad 6.62$$

A fim de provar isto, note que, como f é contínua em $x = 0$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x| < \delta$ implica $|f(x) - f(0)| < \epsilon$ ou, ainda,

$$f(0) - \epsilon < f(x) < f(0) + \epsilon . \qquad 6.63$$

Seja P uma partição de $[a,b]$ cujo k-ésimo subintervalo é $[-\sigma,\sigma]$ com $0 < \sigma < \delta$. Para esta partição, $\theta(x_i) - \theta(x_{i-1})$ é igual a zero para todo $i \neq k$ e igual a 1 para $i = k$. Portanto,

$$\bar{I}(P,f,\theta) = \left[\sup_{-\sigma \le x \le \sigma} f(x) \right] \times 1 \le f(0) + \epsilon \qquad 6.64$$

e, analogamente,

$$\underline{I}(P,f,\theta) = \left[\inf_{-\sigma \le x \le \sigma} f(x) \right] \times 1 \ge f(0) - \epsilon \qquad 6.65$$

Consequentemente,

$$f(0) - \epsilon \le \underline{I}(P,f,\theta) \le \underline{\int_a^b} f\, d\theta \le \overline{\int_a^b} f\, d\theta \le \bar{I}(P,f,\theta) \le f(0) + \epsilon . \qquad 6.66$$

Como isto é verdadeiro para todo $\epsilon > 0$, segue-se que

$$\int_a^b f\,d\theta = f(0) \qquad 6.67$$

qualquer que seja o intervalo $[a,b]$ que contenha a origem como ponto interior. Esta é uma propriedade importante da função θ.

A integral de Riemann-Stieltjes existe se f é contínua (Problema 6.5). Mais geralmente, mesmo que α não seja crescente, prova-se (Johnsonbaugh & Pfaffenberger 2002) que a integral de Riemann-Stieltjes existe se f é contínua e se α é uma função de variação limitada (noção que não definiremos aqui). A integral de Riemann-Stieltjes também pode ser definida como o limite de somas: prova-se que, quando $||P|| \to 0$, a soma de Riemann-Stieltjes $S(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta\alpha_i$ converge para a integral de Riemann-Stieltjes sempre que f é integrável relativamente a α e α é contínua.

Já a equação formal $d\alpha(x) = \alpha'(x)dx$ sugere que a integral de Riemann--Stieltjes de f em relação a α deve se reduzir a uma integral de Riemann quando α é diferenciável. Isto é confirmado pelo teorema abaixo, cuja demonstração poder ser encontrada, por exemplo, em Johnsonbaugh & Pfaffenberger (2002).

Teorema 6.21 *Se α' existe e tanto f quanto α' são integráveis à Riemann em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx. \qquad 6.68$$

A comparação de (6.67) com (6.68) leva os físicos a escrever que a "derivada" da função degrau de Heaviside é igual à "função" delta de Dirac:

$$\theta'(x) = \delta(x). \qquad 6.69$$

Esta igualdade, que no presente contexto é meramente simbólica, adquire um significado preciso na teoria das distribuições, como será visto no Capítulo 9.

Integrais impróprias de Riemann-Stieltjes são definidas exatamente da mesma forma que as integrais impróprias de Riemann.

Leituras Adicionais Selecionadas[2]

Ávila, G. 1999 *Introdução à Análise Matemática.*
Figueiredo, D. G. 1996 *Análise I.*
Kitchen, Jr., J. W. 1968 *Calculus of One Variable.*
• Johnsonbaugh, R. e Pfaffenberger, W. E. 2002 *Foundations of Mathematical Analysis.*
Lima, E. L. 2004 *Curso de Análise*, Vol. 1.
• Rudin, W. 1976 *Principles of Mathematical Analysis.*
• Spivak, M. 1994 *Calculus.*

Problemas

6.1. (a) Se f e g são integráveis em $[a,b]$ com $f \leq g$, prove que $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. (b) Dada uma partição P de $[a,b]$, sejam M_i e m_i definidos da maneira usual para a função f, sendo M_i' e m_i' as quantidades correspondentes para $|f|$. (b) Se $x,y \in [x_{i-1},x_i]$, prove que $|f(x)-f(y)| \leq M_i - m_i$. Prove, ainda, que $|f(x)|-|f(y)| \leq |f(x)-f(y)|$ e deduza que $M_i' - m_i' \leq M_i - m_i$. Sugestão para a segunda parte: tome o supremo, use o Teorema 3.14 e $\sup(-X) = -\inf X$, como estabelecido na demonstração do Teorema 3.13. (c) Prove que se f é integrável então $|f|$ também é integrável e

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

(d) Mostre, por meio de um contraexemplo, que a integrabilidade de $|f|$ não assegura a integrabilidade de f. Sugestão: considere uma variante da função de Dirichlet f_D.

6.2. Sejam f e g integráveis em $[a,b]$. Prove que: (a) fg é integrável em $[a,b]$; (b) f/g é integrável em $[a,b]$ desde que $|g| \geq c > 0$ em $[a,b]$. Sugestão para a parte (a): com $h(x) = f(x)g(x)$, da identidade

$$h(x)-h(y) = g(x)\big(f(x)-f(y)\big)+f(y)\big(g(x)-g(y)\big)$$

2. A lista completa de referências, com plenos detalhes bibliográficos, encontra-se na Bibliografia no fim do livro. O símbolo • destaca obras cuja leitura é altamente recomendada.

deduza que existem números $A > 0$ e $B > 0$ tais que

$$|h(x) - h(y)| \leq A|f(x) - f(y)| + B|g(x) - g(y)|$$

e, em consequência, com notação autoexplicativa,

$$M_i^{(h)} - m_i^{(h)} \leq A\left(M_i^{(f)} - m_i^{(f)}\right) + B\left(M_i^{(g)} - m_i^{(g)}\right).$$

6.3. Seja $[x]$ o maior inteiro não superior a x. Por exemplo, $[\pi] = 3$ e $[-1{,}7] = -2 = [-2]$. Decida qual das funções a seguir é integrável em $[0{,}2]$ e calcule a integral quando existir.
(a) $f(x) = x + [x]$.
(b) $f(x) = x + [x]$ se x é racional e $f(x) = 0$ se x é irracional.

6.4. Calcule $\int_0^\pi x^2 d[x]$. A definição de $[x]$ encontra-se no Problema 6.3.

6.5. Prove que se f é contínua então f é integrável à Riemann-Stieltjes em relação a α, qualquer que seja a função crescente α.

6.6. Prove o seguinte teorema do valor médio para integrais de Riemann-Stieltjes: se f é contínua em $[a,b]$, existe um ponto $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f\, d\alpha = f(c)\,[\alpha(b) - \alpha(a)]$.

6.7. Seja f integrável em $[a,b]$. Prove que existe $x \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_x^b f(t)\,dt.$$

Interprete geometricamente e mostre, por meio de um exemplo, que nem sempre é possível que se tenha $x \in (a,b)$.

6.8. Se f é contínua em $[0,\infty)$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, prove que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = a.$$

Sugestão: considere

$$\frac{1}{N+M}\int_0^{N+M} f(t)\,dt = \frac{1}{N+M}\int_0^N f(t)\,dt + \frac{1}{N+M}\int_N^{N+M} f(t)\,dt,$$

leve em conta que $f(x)$ pode ser tornado arbitrariamente próximo de a sempre que $x \geq N$ tomando N suficientemente grande, e depois trate de escolher M apropriadamente.

6.9. Seja f contínua em $\mathbb{R}$. (a) Se $F(x) = \int_0^x xf(t)\,dt$, encontre $F'(x)$. (b) Use o resultado do item (a) para provar que

$$\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du = \int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt.$$

6.10. Se f é integrável e $f = g'$ em $[a,b]$, prove que para qualquer partição P de $[a,b]$ existem números $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que

$$g(b) - g(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Usando a parte (b) do Teorema 6.12, prove (6.40).

6.11. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica com período a se $f(x+a) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (a) Se f é periódica com período a e integrável em $[0,a]$, prove que $\int_0^a f = \int_b^{a+b} f$ para todo $b \in \mathbb{R}$. (b) Encontre uma função que não é periódica mas sua derivada é periódica. (c) Se f' é periódica com período a e contínua em $[0,a]$, prove que f é periódica com período a se e somente se $f(a) = f(0)$.

6.12. Sejam g e h diferenciáveis, f contínua e

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt.$$

Prove que

$$F'(x) = f(h(x))\,h'(x) - f(g(x))\,g'(x).$$

6.13. Seja $f \geq 0$ uma função contínua em $[a,b]$ e $M = \max f$. Prove que

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_a^b f^p\right)^{1/p} = M.$$

6.14. Seja f uma função contínua em $[a,b]$ tal que $\int_a^b |f| = 0$. Prove que $f = 0$ em $[a,b]$.

7

Sequências e Séries de Funções

A discussão das séries de Taylor no fim do capítulo anterior indica a importância de se considerar funções definidas por séries de funções da forma

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

e estudar sua propriedades. Como no caso de séries numéricas, o estudo de séries de funções deve ser precedido pela investigação das sequências de funções.

7.1 *Sequências de Funções*

Estaremos interessados em sequências de funções com valores reais ou complexos definidas num conjunto X. Tipicamente, mas não necessariamente, X será um subconjunto de $\mathbb{R}$. Sequências de funções serão denotadas por $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ou, simplesmente, por (f_n); quando se revelar conveniente, a notação $f_1, f_2, f_3, \ldots$ também será empregada.

Definição 7.1 *Seja (f_n) uma* ***sequência de funções*** *definidas num conjunto X. Seja f uma função definida em X. Dizemos que (f_n)* ***converge pontualmente*** *para f em X se $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para cada $x \in X$.*

De acordo com esta definição, a sequência de funções (f_n) converge pontualmente para a função f em X se a sequência numérica $(f_n(x))$ converge para o número $f(x)$ para cada $x \in X$. Em símbolos, esta definição escreve-se:

$$(\forall \epsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon).$$

É importante ressaltar que, de modo geral, o número N depende tanto de ϵ quanto de x.

Muitas das funções mais importantes da Matemática são definidas como limites de sequências de funções mais simples. Se (f_n) converge pontualmente para a função f e cada uma das funções f_n goza de uma certa propriedade, parece razoável esperar que a propriedade seja transferida para f. No entanto, como diz Spivak (1994, p. 491) com sua verve admirável, o corpo de resultados sobre funções definidas como limites de sequências pode ser assim resumido: tudo que esperaríamos que fosse verdadeiro é falso, e na verdade dispomos de uma esplêndida coleção de contraexemplos.

Exemplo 7.1.1

Seja $X = [0,1]$ e considere a sequência de funções contínuas $f_n(x) = x^n$. É imediato que (f_n) converge pontualmente para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases},$$

que é descontínua em $x = 1$.

Este exemplo mostra que, apesar de cada f_n ser contínua, a função-limite f não é necessariamente contínua.

Como de modo geral a diferenciação torna as funções mais irregulares, não seria de se esperar que a situação fosse melhor no que se refere à diferenciabilidade.

Exemplo 7.1.2

Seja $X = (-1,1)$ e $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$. Segue-se imediatamente que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in (-1,1)$. Portanto, a derivada do limite é identicamente zero. No entanto, o limite das derivadas é

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } 0 < |x| < 1 \end{cases}.$$

De modo geral, portanto, a derivada do limite não é igual ao limite das derivadas. Além do mais, a função-limite de uma sequência de funções diferenciáveis não é, em geral, diferenciável.

Como a integração é muito menos sensível às irregularidades das funções do que a diferenciação, é razoável esperar que o processo de integração de sequências de funções comporte-se de modo mais decente. Infelizmente, essa expectativa é frustrada.

Exemplo 7.1.3

Seja $X = [0,1]$ e seja

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{se } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2n} \\[2ex] 2n - 2n^2x & \text{se } \dfrac{1}{2n} < x < \dfrac{1}{n} \\[2ex] 0 & \text{se } \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

No intervalo em que é diferente de zero, o gráfico de f_n é um triângulo isósceles de base $1/n$ e altura n. Portanto, a integral de f_n é igual à área desse triângulo:

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Como $f_n(0) = 0$ para todo n e, para $0 < x \leq 1$, $f_n(x) = 0$ para todo n maior do que um certo N (basta escolher $N > 1/x$), resulta que $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Portanto,

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

e segue-se que

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Nos três exemplos examinados, o gráfico de f_n não se torna arbitrariamente próximo do gráfico da função-limite f para todo $n > N$ para algum N suficientemente grande. Isto significa que se considerarmos uma faixa de largura 2ϵ em torno do gráfico de f (ϵ para cima e ϵ para baixo), haverá pontos x em que o número $f_n(x)$ cairá fora dessa faixa. Para um dado ϵ, para que uma porção cada vez maior do gráfico de f_n esteja incluída na faixa teremos que tomar Ns cada vez maiores. Não existe um N que faça com que *todo* o gráfico de f_n com $n > N$ esteja dentro da faixa.

Exemplo 7.1.4
No Exemplo 7.1.3 a função-limite f é identicamente nula. Tome $\epsilon = 1/10$. Se queremos que $f_n(x)$ esteja numa faixa de largura 2ϵ em torno do gráfico de $f \equiv 0$ devemos ter

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{10} \Longrightarrow -\frac{1}{10} < f_n(x) < \frac{1}{10}.$$

Isto só pode ser assegurado para valores de x num subconjunto próprio do intervalo $[0,1]$. Note que $f_n(1/2n^2) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, para qualquer N escolhido, por maior que seja, encontraremos $x = 1/2n^2 \in [0,1]$, com $n > N$, tal que a desigualdade $|f_n(x)| < 1/10$ é violada.

7.2 *Convergência Uniforme*

Se desejamos que os problemas agudos encontrados nos exemplos anteriores sejam resolvidos ou pelo menos amenizados, precisamos de uma noção de convergência mais forte do que a convergência pontual.

Definição 7.2 *Seja (f_n) uma sequência de funções definidas num conjunto X. Seja f uma função definida em X. Dizemos que (f_n)* ***converge uniformemente*** *para f em X se para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ sempre que $n > N$ qualquer que seja $x \in X$.*

Em símbolos, esta definição escreve-se:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x \in X)(n > N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon).$$

Assim como no caso da continuidade uniforme, a definição de convergência uniforme difere da definição de convergência pontual na inversão das posições dos quantificadores universal $\forall x$ e existencial $\exists N$. Esta troca modifica profundamente o significado expresso pela declaração quantificada. Agora, exige-se a existência de um N que sirva para *qualquer* x, isto é, se $n > N$ *todo* o gráfico de f_n está contido numa faixa de largura 2ϵ em torno do gráfico da função-limite f. É claro que convergência uniforme implica convergência pontual, mas a recíproca não é verdadeira. Nos três exemplos discutidos acima ocorre convergência pontual, mas em nenhum deles a convergência é uniforme.

Exemplo 7.2.1

A sequência de funções $f_n(x) = x^2/(1+n^2x^4)$ converge uniformemente para zero em $\mathbb{R}$, mas a sequência $g_n(x) = 2nx/(1+n^2x^2)$ converge para zero apenas pontualmente. Com efeito, de $(1-nx^2)^2 \geq 0$ deduz-se que $x^2 \leq (1+n^2x^4)/(2n)$, donde $|f_n(x)| \leq 1/(2n)$. Dado $\epsilon > 0$, basta tomar $N > 1/(2\epsilon)$ para que, sempre que $n > N$, tenha-se $|f_n(x)| < \epsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, note que $g_n(1/n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, se $\epsilon = 1/2$ não existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|g_n(x)| < 1/2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ bastando que seja $n > N$. De fato, suponha que exista um tal N. Escolhendo $n = 2N$ e $x = 1/(2N)$ temos $|g_n(x)| = 1 > 1/2$, e isto contradiz a hipótese inicial. Portanto, a convergência da sequência (g_n) não é uniforme.

Como, no caso de convergência uniforme, os gráficos de f_n e f tornam-se arbitrariamente próximos a partir de um n suficientemente grande, se cada f_n for integrável f deve ser integrável e a integral de f_n deve convergir para a integral de f.

Teorema 7.3 *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis num intervalo limitado $[a,b]$. Suponha que (f_n) converge uniformemente para f em $[a,b]$. Então f é integrável em $[a,b]$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \int_a^b f. \qquad 7.1$$

Demonstração. Devido à convergência uniforme, dado $\epsilon > 0$ podemos escolher $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in [a,b]$,

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

ou, equivalentemente,

$$f_N(x) - \frac{\epsilon}{3(b-a)} < f(x) < f_N(x) + \frac{\epsilon}{3(b-a)}.$$

É imediato que, para qualquer partição P de $[a,b]$,

$$\overline{I}(P,f) \le \overline{I}(P,f_N) + \frac{\epsilon}{3}, \quad \underline{I}(P,f) \ge \underline{I}(P,f_N) - \frac{\epsilon}{3}. \tag{7.2}$$

Como f_N é integrável, o critério de Riemann — Teorema 6.8 — nos permite escolher P tal que

$$\overline{I}(P,f_N) - \underline{I}(P,f_N) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{7.3}$$

Combinando (7.2) e (7.3) obtemos

$$\overline{I}(P,f) - \underline{I}(P,f) < \epsilon$$

e fica estabelecida a integrabilidade de f pelo critério de Riemann.

Para provar (7.1), dado $\epsilon > 0$ escolhamos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

para todo $n > N$ e todo $x \in [a,b]$. Então,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \\ &\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\ &< \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}dx \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

para todo $n > N$. Isto prova que a sequência numérica $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$ converge para o número $\int_a^b f(x)dx$. ∎

Esta demonstração sugere que a condição de que o intervalo seja limitado não pode ser dispensada.

Exemplo 7.2.2

Seja $X = [0,\infty)$ e considere

$$f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-x/n}.$$

É fácil mostrar que esta sequência converge uniformemente para a função identicamente nula. De fato, como $0 < e^{-x/n} \leq 1$ para qualquer x em $[0,\infty)$, dado $\epsilon > 0$ basta escolher $N > 1/\epsilon$ para se ter $|f_n(x)| < \epsilon$ para todo $x \in [0,\infty)$ sempre que $n > N$. No entanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{n} e^{-x/n} dx \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 \\ &= 1 \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \\ &= \int_0^\infty 0dx = 0.\end{aligned}$$

Um caso pior é a sequência

$$g_n(x) = \frac{1}{n} e^{-x/n^2},$$

que também converge uniformemente para a função identicamente nula em $[0,\infty)$ mas

$$\int_0^\infty g_n(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{n} e^{-x/n^2} dx = n \to \infty.$$

Vale destacar que a convergência uniforme é condição *suficiente* para que o limite da integral seja a integral do limite, mas não é *necessária.*

Exemplo 7.2.3

Como vimos no Exemplo 7.2.1, a sequência $f_n(x) = 2nx/(1+n^2x^2)$ converge pontualmente para a função nula sobre a toda a reta real, mas não converge uniformemente. Apesar de a convergência não ser uniforme,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{2nx}{1+n^2x^2}dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n}\Big|_{x=0}^{x=1}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{n} = 0$$
$$= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2}dx.$$

O tratamento da continuidade é ligeiramente mais difícil e utiliza o chamado "argumento $\epsilon/3$". Para estabelecer que a função-limite f é contínua no ponto x é preciso mostrar que, dado $\epsilon > 0$, tem-se

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \tag{7.4}$$

sempre que $|x-y| < \delta$ para algum $\delta > 0$. Suponha que possamos fazer com que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ e } |f_n(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{7.5}$$

tomando n suficientemente grande. Se cada f_n é contínua, podemos tornar

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{7.6}$$

desde que $|x-y|$ seja suficientemente pequeno. A desigualdade (7.4) decorre imediatamente de (7.5) e (7.6). Mas, para termos as desigualdades (7.5) satisfeitas em pontos distintos x e y, é necessário invocar a convergência uniforme.

Teorema 7.4 *Seja* (f_n) *uma sequência de funções contínuas em* $[a,b]$ *e suponha que* f_n *converge uniformemente para* f *em* $[a,b]$. *Então* f *é contínua em* $[a,b]$.
Demonstração. Como (f_n) converge uniformemente para f em $[a,b]$, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Como f_N é contínua em $x \in [a,b]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\epsilon}{3}$$

se $|x-y|<\delta$. Portanto, se $|x-y|<\delta$,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= |f(x)-f_N(x)+f_N(x)-f_N(y)+f_N(y)-f(y)| \\ &\le |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)| \\ &< \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon.\end{aligned}$$

Isto prova que f é contínua em todo $x \in [a,b]$. ∎

O caso da diferenciação é bem mais delicado.

Exemplo 7.2.4

Em $(-\infty,\infty)$ a sequência

$$g_n(x)=\frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}}$$

tende a zero uniformemente — uma vez que $|g_n(x)| \le 1/\sqrt{n}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ — mas oscila cada vez mais rapidamente à medida que n cresce. A sequência das derivadas é

$$g_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx,$$

que não converge para certos valores de x, como, por exemplo, $x=0$ e $x=\pi$. Na verdade, $g_n'(x)$ diverge para qualquer x real. De fato, se $\sqrt{n}\cos nx$ convergisse então $\cos nx$ teria que convergir para zero (justifique esta afirmação), mas isto é impossível (Problema 7.1).

Apesar das dificuldades que acabamos de ilustrar, se a sequência das derivadas converge uniformemente para uma função contínua o teorema fundamental do cálculo, aliado ao Teorema 7.3, torna quase inevitável que a derivada do limite seja igual ao limite das derivadas.

Teorema 7.5 *Seja (f_n) uma sequência de funções diferenciáveis em $[a,b]$, cujas derivadas f_n' são integráveis em $[a,b]$, e suponha que a sequência (f_n') converge uniformemente para alguma função contínua g. Suponha, ainda, que para algum $c \in [a,b]$ a sequência de números $(f_n(c))$ é convergente. Então f_n converge uniformemente para uma função f que é diferenciável e*

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Esta última igualdade costuma ser escrita na forma mais sugestiva

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx} f_n(x).$$

Demonstração. Pelo segundo teorema fundamental do Cálculo[1] temos, para qualquer $x \in [a,b]$,

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt.$$

Como (f_n') converge uniformemente para g, o Teorema 7.3 permite tomar o limite sob o sinal de integral para obter

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(c) + \int_c^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt = f(c) + \int_c^x g(t)dt.$$

Como g é contínua,

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Só resta mostrar que a convergência da sequência (f_n) é uniforme. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$,

$$|f_n(c) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |f_n'(t) - g(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \quad \text{para todo } t \in [a,b].$$

Consequentemente, para todo $n > N$ e todo $x \in [a,b]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(c) - f(c)| + \int_c^x |f_n'(t) - g(t)|dt < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \epsilon.$$

Isto prova a convergência uniforme e completa a demonstração do teorema. ∎

7.3 *Séries de Funções*

As séries de funções são definidas a partir das sequências de funções exatamente como as séries numéricas são definidas a partir das sequências numéricas.

1. Conforme o Problema 6.10, basta que se tenha $f = g'$ com f integrável para que a equação (6.40) seja válida.

Definição 7.6 *Se* (f_n) *é uma sequência de funções reais definidas num conjunto* X*, a* ***série de funções*** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *é o par ordenado* $\big((f_n),(s_n)\big)$*, onde*

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n .$$

Definição 7.7 *Se* (f_n) *é uma sequência de funções reais definidas num conjunto* X*, a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ***converge pontualmente*** *para* f *em* X *se e somente se* (s_n) *converge pontualmente para* f *em* X*. A série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ***converge uniformemente*** *para* f *em* X *se e somente se* (s_n) *converge uniformemente para* f *em* X*.*

Cada um dos teoremas anteriores tem uma versão correspondente para séries uniformemente convergentes. Foi Weierstrass quem primeiro percebeu e destacou a importância da distinção entre convergência pontual e convergência uniforme, e que esta última assegura a validade da integração termo a termo de uma série de funções.

Teorema 7.8 *Suponha que* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente para* f *em* $[a,b]$*.*
(i) *Se cada* f_n *é contínua em* $[a,b]$*, então* f *é contínua em* $[a,b]$*.*
(ii) *Se cada* f_n *é integrável em* $[a,b]$*, então* f *é integrável em* $[a,b]$ *e*

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$$

ou, numa forma equivalente porém mais sugestiva,

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n .$$

Suponha, agora, que para algum $c \in [a,b]$ *a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ *é convergente.*
(iii) *Se cada* f_n *é diferenciável com* f_n' *integrável em* $[a,b]$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *converge uniformemente em* $[a,b]$ *para alguma função contínua, então*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

ou, mais sugestivamente,

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) .$$

Demonstração. (i) Como cada f_n é contínua, $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ é contínua. Segue-se que f é o limite uniforme de (s_n), logo f é contínua pelo Teorema 7.4.

(ii) Como s_n converge uniformemente para f, segue-se do Teorema 7.3 que

$$\int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_1 + \cdots + f_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n .$$

(iii) Cada s_n é diferenciável, cada derivada s_n' é integrável e (s_n') converge uniformemente para uma função contínua. Além disso, a sequência numérica $(s_n(c))$ é convergente. Logo,

$$f' = \lim_{n\to\infty} s_n' = \lim_{n\to\infty} (f_1' + \cdots + f_n') = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

pelo Teorema 7.5. ∎

Todos os resultados expressos neste teorema dependem da convergência uniforme das séries $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$. A condição mais simples que assegura a convergência uniforme de uma série de funções está contida no resultado a seguir.

Teorema 7.9 (Teste M de Weierstrass) *Seja (f_n) uma sequência de funções definidas num conjunto X e seja (M_n) uma sequência de números positivos tais que*

$$|f_n(x)| \leq M_n \ \textit{para todo}\ x \in X .$$

Suponha, ainda, que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente. Então, para todo $x \in X$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente e a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para a função

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n .$$

Demonstração. Para cada $x \in X$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ é convergente pelo teste da comparação, de modo que existe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Além disso, para qualquer $x \in X$ temos

$$\Big| f(x) - [f_1(x) + \cdots f_N(x)] \Big| = \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \Big| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n .$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, o número real $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n$ pode ser tornado arbitrariamente pequeno escolhendo N suficientemente grande. ∎

Exemplo 7.3.1
A fórmula

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = x - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!}\frac{x^5}{5} - \cdots$$

é válida para todo x real. A fim de provar isto, basta considerar $x > 0$ já que a série só contém potências ímpares de x. Note que a partir de

$$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots$$

deduz-se

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \cdots$$

com o primeiro membro desta última equação definido como igual a 1 em $t = 0$. Para $0 \leq t \leq x$ a série é majorada em valor absoluto por

$$x + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots$$

que é convergente (imediato pelo teste da razão). Pelo teste M de Weierstrass, a série converge uniformemente para $\operatorname{sen} t/t$. Como $\operatorname{sen} t/t$ bem como cada t^n é integrável em $[0,x]$, a integração termo a termo é permitida pelo Teorema 7.3 e obtemos

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = \int_0^x dt - \int_0^x \frac{t^2}{3!}dt + \int_0^x \frac{t^4}{5!}dt - \cdots = x - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!}\frac{x^5}{5} - \cdots,$$

como queríamos demonstrar.

7.4 *Séries de Potências*

Quando $f_n(x) = a_n(x-a)^n$ a série de funções

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

é chamada de **série de potências centrada em** a. O teste M de Weierstrass é particularmente apropriado para o estudo da convergência de séries de potências. Sem perda de generalidade, e para simplificar a notação, estudaremos apenas séries de potências centradas em 0, isto é,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Em geral as séries de potências não convergem para todo x. Há mesmo casos extremos em que a série só converge para $x = 0$, como a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n ,$$

para a qual o teste da razão fornece

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n} = (n+1)|x| ,$$

que tende para $+\infty$ quando $n \to \infty$ se $x \neq 0$. No entanto, se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para algum $x_0 \neq 0$ muita coisa pode ser dita sobre f para $|x| < |x_0|$.

Teorema 7.10 *Suponha que a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

seja convergente. Então a série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge absolutamente e uniformemente para todo x *tal que* $|x| < |x_0|$. *Além disso,* f *é diferenciável e*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

para todo x *com* $|x| < |x_0|$.

Demonstração. Seja c um número positivo tal que $0 < c < |x_0|$. Como a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ é convergente, seu termo geral tende a zero. Em particular, a sequência $(a_n x_0^n)$ é limitada, isto é, existe algum número $M > 0$ tal que

$$|a_n x_0^n| \leq M \text{ para todo } n.$$

Para x com $|x| \leq c$ temos

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \frac{|x|^n}{|x_0|^n} \leq M \frac{c^n}{|x_0|^n} = M r^n \text{ onde } 0 < r = \frac{c}{|x_0|} < 1,$$

de modo que a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} M r^n = M \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

é convergente. Pelo teste M de Weierstrass, com $M_n = M r^n$, segue-se que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente (e absolutamente) em $[-c, c]$. Quanto à série das derivadas $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, um argumento análogo se aplica, pois

$$|n a_n x^{n-1}| = n \left| a_n x_0^{n-1} \frac{x^{n-1}}{x_0^{n-1}} \right| = \frac{n}{|x_0|} |a_n x_0^n| \frac{|x|^{n-1}}{|x_0|^{n-1}} \leq \frac{M}{|x_0|} n r^{n-1} = \bar{M} n r^{n-1}$$

com $\bar{M} = M/|x_0|$. Como a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{M} n r^{n-1} = \bar{M} \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1}$$

converge (pelo teste da razão), o teste M de Weierstrass com $M_n = \bar{M} n r^{n-1}$ mostra que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ converge uniformemente e absolutamente em $[-c, c]$. Como cada termo da série das derivadas é uma função contínua, seu limite é uma função contínua. Pelo Teorema 7.8, a série das derivadas converge uniformemente para a derivada da série original, isto é,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Como c é qualquer número positivo menor que $|x_0|$, os resultados para a série original e para a série das derivadas são válidos para todo x tal que $|x| < |x_0|$. ∎

As considerações anteriores aplicadas a uma série de potências valem igualmente para sua derivada. Portanto, se a série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge num intervalo $(-R,R)$, sua segunda derivada é dada por

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

para todo $x \in (-R,R)$. Em geral,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

e f é infinitamente diferenciável em $(-R,R)$. Note, ainda, que

$$f^{(k)}(0) = k(k-1)\cdots 1\, a_k = k!\, a_k,$$

de modo que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

e toda série de potências centrada em $x = 0$ é a série de Taylor da função definida pela referida série de potências. É imediato que isto também vale para uma série de potências centrada em $x = a$ com $a \neq 0$. Uma função que pode ser expressa como uma série de potências convergente num intervalo é chamada de **função analítica** no intervalo. Toda função analítica é infinitamente diferenciável, mas a recíproca não é verdadeira, como vimos no Exemplo 6.5.2.

Exemplo 7.4.1

A série

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

converge em $x_0 = 1$ e, consequentemente, converge para todo x com $|x| < 1$. Portanto,

$$\ln'(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots = \frac{1}{1+x} \quad \text{se } |x| < 1.$$

A série original não converge em $x = -1$ e a série obtida por derivação termo a termo diverge tanto em $x = -1$ quanto em $x = 1$, mas isto não contradiz o Teorema 7.10, que só garante a convergência para $|x| < 1$.

7.5 *Aplicações a Equações Integrais e Diferenciais*

As equações integrais encontram aplicações importantes no eletromagnetismo (Eyges 1972), na teoria quântica do espalhamento (Taylor 1972) e em inúmeros outros ramos da Física.

Antes de entrar propriamente no assunto alguns preparativos são necessários. Vejamos primeiro como se define continuidade para uma função de várias variáveis. No caso de uma função real ou complexa de n variáveis reais, com $n > 1$, a noção de continuidade é definida da mesma forma que no caso de funções de uma variável, exceto pela substituição de $|x - y|$, com $x, y \in \mathbb{R}$, pela distância

$$||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e limitado, vale o teorema de Bolzano-Weierstrass: toda sequência em X tem uma subsequência que converge para um ponto de X. Portanto, da mesma forma que para funções de uma variável, desde que X seja fechado e limitado, prova-se que se uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em X então f é uniformemente contínua em X. Além disso, f é limitada e assume valores máximo e mínimo em X.

Temos um resultado simples e útil a respeito de funções definidas por integrais de funções contínuas de duas variáveis.

Teorema 7.11 *Se $G : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ é contínua e $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é definida por*

$$F(x) = \int_c^d G(x,s)\,ds, \tag{7.7}$$

então F é contínua.

Demonstração. Para x e y em $[a,b]$ temos

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_c^d (G(x,s) - G(y,s))\,ds \right| \leq \int_c^d |G(x,s) - G(y,s)|\,ds. \tag{7.8}$$

Seja dado $\epsilon > 0$. Como G é uniformemente contínua em $[a,b] \times [c,d]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|G(x,s) - G(y,s)| < \frac{\epsilon}{d-c} \tag{7.9}$$

se $\|(x,s) - (y,s)\| = |x - y| < \delta$. Portanto,

$$|F(x) - F(y)| \leq \int_c^d |G(x,s) - G(y,s)| ds < \frac{\epsilon}{d-c}(d-c) = \epsilon \tag{7.10}$$

sempre que $|x - y| < \delta$, o que prova que F é contínua — de fato, uniformemente contínua — em $[a,b]$. ∎

EQUAÇÃO INTEGRAL DE FREDHOLM

Agora estamos prontos para tratar do assunto principal. A **equação integral de Fredholm de segunda espécie** é uma equação da forma

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\phi(s)ds, \tag{7.11}$$

onde f e K são funções conhecidas, λ é um número real ou complexo e ϕ é a função incógnita. A função K é chamada de **núcleo** (*kernel*, em inglês) da equação integral.

Tentemos resolver esta equação pelo método das aproximações sucessivas:

$$\phi_0(x) = \phi^{(0)}(x) = f(x), \tag{7.12}$$

$$\phi_1(x) = \phi_0(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\phi^{(0)}(s)ds \equiv \phi^{(0)}(x) + \lambda\phi^{(1)}(x), \tag{7.13}$$

e, em geral,

$$\phi_n(x) = \phi^{(0)}(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\phi_{n-1}(s)ds = \phi^{(0)}(x) + \lambda\phi^{(1)} + \ldots + \lambda^n\phi^{(n)}, \tag{7.14}$$

onde

$$\phi^{(n)}(x) = \int_a^b K(x,s)\phi^{(n-1)}(s)ds, \; n \in \mathbb{N}. \tag{7.15}$$

Note que a n-ésima aproximação ϕ_n é obtida por um método iterativo que consiste em substituir ϕ — considerada como definida pelo segundo membro de (7.11) — em sua própria definição, isto é, no segundo membro da equação

integral (7.11), repetir o procedimento $n+1$ vezes e descartar o termo que contém a função incógnita ϕ.

Se f é contínua no intervalo limitado $I = [a,b]$ e K é contínua no quadrado $I \times I$, então ambas são limitadas:

$$|f(x)| \le m \quad (a \le x \le b); \quad |K(x,s)| \le M \quad (a \le x,s \le b). \tag{7.16}$$

Neste caso,

$$|\phi^{(0)}(x)| = |f(x)| \le m, \tag{7.17}$$

$$|\phi^{(1)}(x)| \le \int_a^b |K(x,s)||f(s)|\,ds \le mM(b-a), \tag{7.18}$$

$$|\phi^{(2)}(x)| \le M \max_{a\le x\le b} |\phi^{(1)}(x)|(b-a) \le mM^2(b-a)^2, \tag{7.19}$$

e, por indução,

$$|\phi^{(n)}(x)| \le mM^n(b-a)^n. \tag{7.20}$$

Consequentemente,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \lambda^n \phi^{(n)}(x)\right| \le \sum_{n=0}^{N} |\lambda^n||\phi^{(n)}(x)| \le m \sum_{n=0}^{N} |\lambda|^n M^n (b-a)^n, \tag{7.21}$$

de modo que, pelo teste M de Weierstrass, se

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \tag{7.22}$$

a **série de Neumann**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi^{(n)}(x) \tag{7.23}$$

converge uniformemente em $[a,b]$ porque é dominada pela série geométrica convergente $m\sum \rho^n$ com $0 < \rho = |\lambda| M(b-a) < 1$.

As considerações acima nos permitem formular um teorema de existência.

Teorema 7.12 *Seja f contínua no intervalo limitado $I = [a,b]$ e K contínua no quadrado $I \times I$. Se*

$$|\lambda|(b-a) \max_{a\le x,s\le b} |K(x,s)| < 1 \tag{7.24}$$

então a função ϕ definida pela série de Neumann

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi^{(n)}(x), \tag{7.25}$$

com as funções $\phi^{(n)}$ dadas por (7.12) *e* (7.15), *é uma solução contínua da equação* (7.11).

Demonstração. Substituindo (7.25) no segundo membro de (7.11) e integrando termo a termo, o que é permitido pelo Teorema 7.8 devido à convergência uniforme da série de Neumann, resulta

$$\begin{aligned} f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\phi(s)ds &= \phi^{(0)}(x) + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K(x,s)\phi^{(n)}(s) \\ &= \phi^{(0)}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1}\phi^{(n+1)}(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi^{(n)}(x) = \phi(x), \end{aligned}$$

de modo que a equação integral é satisfeita. A continuidade de ϕ decorre da continuidade de cada $\phi^{(n)}$, pelo Teorema 7.11, e do Teorema 7.8. ∎

A condição (7.24) não é necessária para a convergência da série de Neumann. Um exemplo extremo é a equação

$$\phi(x) = \operatorname{sen}^2 x + \lambda \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \cos s \, \phi(s)\, ds \quad (0 \le x \le 2\pi), \tag{7.26}$$

para a qual

$$\max_{0\le x,s \le 2\pi} |K(x,s)| = \max_{0\le x,s\le 2\pi} |\operatorname{sen} x \cos s| = 1 \tag{7.27}$$

e o Teorema 7.12 só assegura a convergência da série de Neumann para $|\lambda| < 1/2\pi$. No entanto,

$$\phi^{(0)}(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad \phi^{(1)}(x) = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \cos s \operatorname{sen}^2 s \, ds = \operatorname{sen} x \left[\frac{\operatorname{sen}^3 s}{3}\right]_0^{2\pi} = 0, \tag{7.28}$$

donde

$$\phi^{(n)}(x) = 0, \quad n = 2,3,\ldots. \tag{7.29}$$

Portanto, a série de Neumann é convergente para qualquer λ porque, na verdade, se reduz a uma soma finita: apenas o primeiro termo da série é diferente de zero.

Equação Integral de Volterra

Voltemos nossa atenção, agora, para a **equação integral de Volterra de segunda espécie**

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s)\phi(s)ds \quad (a \le x \le b). \tag{7.30}$$

O método das aproximações sucessivas é aplicável tomando $K(x,s) = 0$ para $s > x$. Com as memas hipóteses anteriores sobre f e K temos

$$|\phi^{(0)}(x)| = |f(x)| \le m, \tag{7.31}$$

$$|\phi^{(1)}(x)| \le \int_a^x |K(x,s)||f(s)|ds \le mM(x-a), \tag{7.32}$$

$$|\phi^{(2)}(x)| \le \int_a^x |K(x,s)||\phi^{(1)}(s)|ds \le MmM\int_a^x (s-a)ds = mM^2\frac{(x-a)^2}{2} \tag{7.33}$$

e, por indução,

$$|\phi^{(n)}(x)| \le mM^n\frac{(x-a)^n}{n!} \le mM^n\frac{(b-a)^n}{n!}. \tag{7.34}$$

Uma vez que

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \lambda^n\phi^{(n)}(x)\right| \le \sum_{n=0}^{N} |\lambda^n||\phi^{(n)}(x)| \le \sum_{n=0}^{N} |\lambda|^n\frac{mM^n(b-a)^n}{n!} = me^{|\lambda|M(b-a)}, \tag{7.35}$$

segue-se que a série de Neumann converge uniformemente *qualquer que seja o valor de* λ, e constitui uma solução contínua da equação (7.30).

Consideremos, agora, as soluções contínuas da equação homogênea

$$\phi(x) = \lambda\int_a^x K(x,s)\phi(s)ds. \tag{7.36}$$

Com

$$A = \max_{a\le x\le b} |\phi(x)|, \tag{7.37}$$

a repetição da análise anterior fornece

$$|\phi(x)| \le |\lambda|AM(x-a), \tag{7.38}$$

$$|\phi(x)| \le |\lambda|\int_a^x |K(x,s)||\phi(s)|ds \le |\lambda|^2M^2A\frac{(x-a)^2}{2}, \tag{7.39}$$

e, por indução,

$$|\phi(x)| \leq A \frac{[M|\lambda|(x-a)]^n}{n!}. \tag{7.40}$$

Como esta desigualdade vale para todo n e, qualquer que seja x,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[M|\lambda|(x-a)]^n}{n!} = 0, \tag{7.41}$$

concluímos que a única solução contínua da equação de Volterra homogênea é $\phi = 0$.

Teorema 7.13 *Seja f contínua no intervalo limitado $I = [a,b]$ e K contínua no quadrado $I \times I$. Para qualquer valor de λ a equação integral de Volterra* (7.30) *possui uma única solução contínua dada pela série de Neumann correspondente.*

Demonstração. A existência de uma solução contínua dada pela série de Neumann foi demonstrada acima. Se ϕ_1 e ϕ_2 são duas soluções contínuas de (7.30), a diferença $\phi_1 - \phi_2$ é uma solução contínua da equação homogênea (7.36). Mas acabamos de provar que a única solução contínua da equação homogênea é $\phi = 0$. Portanto, $\phi_1 = \phi_2$ e a unicidade fica estabelecida. ∎

Exercício 7.5.1
Sob as condições do Teorema 7.12, prove que a solução contínua da equação de Fredholm (7.11) é única.

EQUAÇÃO DIFERENCIAL LINEAR DE SEGUNDA ORDEM

Como importante aplicação deste último teorema, considere a problema de existência e unicidade das soluções da equação diferencial de segunda ordem

$$u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) = f(x) \tag{7.42}$$

no intervalo limitado $I = [a,b]$ com condições iniciais

$$u(a) = u_0, \quad u'(a) = u_1. \tag{7.43}$$

Suponhamos que a_1, a_2 e f sejam contínuas em I e busquemos uma solução $u \in C^2(I)$, isto é, u e suas duas primeiras derivadas são funções contínuas em I. Definindo $\phi(x) = u''(x)$, duas integrações sucessivas fornecem

$$u'(x) = u_1 + \int_a^x \phi(s)ds \tag{7.44}$$

e

$$u(x) = u_0 + u_1(x-a) + \int_a^x dt \int_a^t \phi(s)ds. \tag{7.45}$$

Portanto, invertendo a ordem de integração (vide teorema de Fubini do Apêndice A) ou usando o resultado do Problema 6.9, temos

$$\int_a^x dt \int_a^t \phi(s)\,ds = \int_a^x ds \int_s^x dt\phi(s) = \int_a^x (x-s)\phi(s)\,ds, \tag{7.46}$$

o que permite reescrever a equação (7.45) na forma

$$u(x) = u_0 + u_1(x-a) + \int_a^x (x-s)\phi(s)\,ds. \tag{7.47}$$

Introduzindo $u''(x) = \phi(x)$ e as equações (7.44) e (7.47) na equação diferencial (7.42) resulta

$$\phi(x) = F(x) + \int_a^x K(x,s)\phi(s)ds \tag{7.48}$$

com

$$K(x,s) = -a_1(x) - (x-s)a_2(x) \tag{7.49}$$

e

$$F(x) = f(x) - u_1 a_1(x) - u_0 a_2(x) - (x-a)u_1 a_2(x). \tag{7.50}$$

Como F e K são contínuas, o Teorema 7.13 assegura que a equação integral (7.48) tem uma única solução contínua ϕ. Logo, a equação diferencial (7.42) com as condições iniciais (7.43) tem uma única solução u em $C^2(I)$ dada por (7.47). O mesmo método estabelece existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias lineares de ordem n.

Intervalo de Integração Arbitrário

Quando o intervalo de integração não é limitado, métodos mais sofisticados são necessários para provar existência e unicidade das soluções das equações integrais de Fredholm e Volterra. No Apêndice B é apresentado um método capaz de lidar com equações integrais em espaços de Hilbert e que tem a virtude de ser aplicável a equações integrais não lineares.

7.6 *Diferenciação Sob o Sinal de Integral*

Considere uma função f definida pela integral

$$f(x) = \int_a^b g(x,y)dy$$

onde $x \in X \subset \mathbb{R}$ e $g : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$. O processo de diferenciação é particularmente delicado e a derivada de uma função definida por uma integral nem sempre pode ser obtida diferenciando cegamente sob o sinal de integral.

Exemplo 7.6.1

Considere a função (Gelbaum & Olmsted 1992)

$$g(x,y) = \frac{x^3}{y^2}e^{-x^2/y} \quad \text{para} \quad y > 0$$

e seja

$$f(x) = \int_0^1 g(x,y)dy = \int_0^1 \frac{x^3}{y^2}e^{-x^2/y}dy = \int_{x^2}^{\infty} xe^{-u}du = xe^{-x^2}.$$

Por um lado,

$$f'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2} \implies f'(0) = 1.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{3x^2}{y^2} - \frac{2x^4}{y^3}\right)e^{-x^2/y} \implies \frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = 0.$$

Portanto,

$$f'(0) = 1 \neq \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(0,y)dy = \int_0^1 0\,dy = 0.$$

INTERVALO DE INTEGRAÇÃO LIMITADO

Quando o intervalo de integração $[a, b]$ é limitado, a diferenciação sob o sinal de integral é permitida sob uma condição suficiente não muito restritiva.

Teorema 7.14 *Se g e $\partial g/\partial x$ são contínuas no retângulo $[c,d] \times [a,b]$, então a função f definida por*

$$f(x) = \int_a^b g(x,y)\,dy$$

é diferenciável e

$$f'(x) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dy$$

para todo $x \in (c,d)$.

Demonstração. A continuidade de g assegura a existência da integral que define f. Se x e $x+h$ são pontos de (c,d), com $h \neq 0$, temos que

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dy\right| = \left|\int_a^b \left[\frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h} - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right] dy\right|$$
$$\leq \int_a^b \left|\frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h} - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right| dy.$$

Pelo teorema do valor médio aplicado à função g,

$$g(x+h,y) - g(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x+\eta, y)\,h$$

para algum η tal que $0 < |\eta| < |h|$, de modo que

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dy\right| \leq \int_a^b \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x+\eta,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| dy.$$

Como $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ é uniformemente contínua em $[c,d] \times [a,b]$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x+\eta,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

se $\|(x+\eta,y)-(x,y)\| < \delta$, que equivale a $|\eta| < \delta$. Como $0 < |\eta| < |h|$, basta tomar $|h| < \delta$ para se ter

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dy\right| < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dx < \epsilon,$$

de modo que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(y)}{h} = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dy,$$

como queríamos demonstrar. ∎

Exemplo 7.6.2
Sabendo que

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \text{ para } \alpha > 1,$$

calcular

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(2 - \cos x)^2}.$$

Seja

$$f(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}.$$

A função

$$g(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha - \cos x}$$

é contínua e tem derivada parcial em relação a α contínua no intervalo $[3/2, 3]$, por exemplo. Consequentemente,

$$f'(\alpha) = \int_0^{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{\alpha - \cos x} \right] dx = -\int_0^{\pi} \frac{dx}{(\alpha - \cos x)^2},$$

ou seja,

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(\alpha - \cos x)^2} = -\frac{d}{d\alpha} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} = \frac{\alpha \pi}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}}.$$

Portanto,

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

INTERVALO DE INTEGRAÇÃO ARBITRÁRIO

Quando o intervalo de integração não é limitado, os argumentos utilizados na demonstração do Teorema 7.14 são impotentes para justificar a derivação sob o sinal de integral, mesmo que $\partial g / \partial x$ seja uniformemente contínua.

A maneira mais simples e eficiente de generalizar o Teorema 7.14 sob condições extremamente brandas é usando a integral de Lebesgue (vide Apêndice A) e seus poderosos teoremas de convergência. Para simplicar algumas equações, também usaremos a notação $D_1 g$ para denotar a derivada parcial $\partial g / \partial x$.

Teorema 7.15 *Sejam X e Y conjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}$ e suponha que $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ é tal que a integral de Lebesgue $\int_Y g(x,y)\,dy$ existe para cada $x \in X$. Seja f definida para cada $x \in X$ pela integral de Lebesgue*

$$f(x) = \int_Y g(x,y)\,dy.$$

Se $D_1 g(x,y)$ existe para $(x,y) \in X \times Y$ e existe uma função G integrável em Y tal que $|D_1 g(x,y)| \leq G(y)$ para $(x,y) \in X \times Y$, então $f'(x)$ existe para todo $x \in X$ e tem-se

$$f'(x) = \int_Y \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

Demonstração. Seja (h_n) uma sequência tal que $h_n \to 0$ com $h_n \neq 0$ para todo n. Então

$$\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} = \int_Y \frac{g(x+h_n,y) - g(x,y)}{h_n}\,dy.$$

Por hipótese,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x+h_n,y) - g(x,y)}{h_n} = D_1 g(x,y)$$

para $(x,y) \in X \times Y$. Pelo teorema do valor médio, existe ξ_n, com $|\xi_n| < |h_n|$, tal que

$$g(x+h_n,y) - g(x,y) = D_1 g(x+\xi_n,y)\,h_n.$$

de modo que

$$\left|\frac{g(x+h_n,y) - g(x,y)}{h_n}\right| = |D_1 g(x+\xi_n,y)| \leq G(y) \quad \forall (x,y) \in X \times Y.$$

Portanto, o teorema da convergência dominada de Lebesgue (Apêndice A) mostra que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \\ &= \int_Y \lim_{n\to\infty} \frac{g(x+h_n,y) - g(x,y)}{h_n}\,dy \\ &= \int_Y D_1 g(x,y)\,dy. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 7.6.3

A transformada de Fourier de $x \mapsto e^{-x^2/2}$ é

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-x^2/2} dx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

A fim de determinar explicitamente $f(k)$, note que função $g(k,x) = e^{-ikx} e^{-x^2/2}$ satisfaz todas as condições do Teorema 7.15. De fato, como $|e^{-ikx}| = 1$, temos

$$\left| \frac{\partial g}{\partial k}(k,x) \right| = |-ixe^{-ikx} e^{-x^2/2}| \leq |x| e^{-x^2/2}$$

e a função $x \mapsto |x| e^{-x^2/2}$ é integrável sobre $\mathbb{R}$. Portanto, é legítimo diferenciar sob o sinal de integral e escrever

$$f'(k) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} x e^{-x^2/2} dx.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} f'(k) &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -e^{-ikx} e^{-x^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} (-ik) e^{-ikx} e^{-x^2/2} dx \right\} \\ &= \frac{-k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-x^2/2} dx \\ &= -kf(k), \end{aligned}$$

donde

$$f(k) = f(0) e^{-k^2/2}.$$

Como

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1,$$

resulta, finalmente,

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-x^2/2} dx = e^{-k^2/2}.$$

A função $x \mapsto e^{-x^2/2}$ é a sua própria transformada de Fourier.

Leituras Adicionais Selecionadas[2]

Apostol, T. M., 1974 *Mathematical Analysis.*

Ávila, G. 1999 *Introdução à Análise Matemática.*

Courant, R. e John, F. 1999 *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. I.

Figueiredo, D. G. 1996 *Análise I.*

Johnsonbaugh, R. e Pfaffenberger, W. E. 2002 *Foundations of Mathematical Analysis.*

Lima, E. L. 2004 *Curso de Análise*, Vol. 1.

• Spivak, M. 1994 *Calculus.*

Problemas

7.1. Prove que $\cos nx$ não tende a zero quando $n \to \infty$ para nenhum valor de x. Sugestão: se a sequência $\cos nx$ tende a zero, então a subsequência $\cos 2nx$ também tende a zero; daí deduza uma contradição.

7.2. Sejam $f_n(x) = 1/(1+n^2x^2)$ e $g_n(x) = nx(1-x)^n$ com $x \in [0,1]$. Prove que (f_n) e (g_n) convergem pontualmente e determine os respectivos limites. A convergência de (f_n) é uniforme? Prove que (g_n) não converge uniformemente. Sugestão: examine os valores de $g_n(x)$ para $x = 1/n$.

7.3. Prove que a sequência de funções

$$\sqrt{x}, \sqrt{x+\sqrt{x}}, \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}, \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}, \ldots$$

é convergente se $x \geq 0$ e calcule o seu limite.

7.4. Seja (f_n) uma sequência de funções limitadas que converge uniformemente para f em $X \subset \mathbb{R}$. (a) Prove que f é limitada em X. Dê um exemplo mostrando que esta afirmação é falsa se a convergência for apenas pontual. (b) Prove que (f_n) é uniformemente limitada em X.

2. A lista completa de referências, com plenos detalhes bibliográficos, encontra-se na Bibliografia no fim do livro. O símbolo • destaca obras cuja leitura é altamente recomendada.

7.5. Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ converge unformemente em $\mathbb{R}$.

7.6. Prove que $f_n(x) = x^2/(1 + nx^2)$ converge uniformemente para zero em $\mathbb{R}$.

7.7. Prove que $f_n(x) = e^{x/n}$ tende a 1 pontualmente para todo x real, mas não uniformemente. Mostre que a convergência é uniforme em qualquer intervalo limitado $[-a, a]$.

7.8. Investigue o tipo de convergência da sequência $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ em $[0,1]$.

7.9. Prove que $f_n(x) = nxe^{-nx}$ tende a zero pontualmente em $[0, \infty)$, mas não uniformemente. Mostre que a convergência é uniforme em qualquer intervalo $[a, \infty)$ com $a > 0$.

7.10. Prove que $f_n(x) = nx^2/(1 + nx)$ converge uniformemente para x em $[0,1]$.

7.11. Determine o limite da sequência de funções $f_n(x) = \frac{1}{1 + n\,\text{sen}^2 \pi x}$ em $\mathbb{R}$ e discuta o tipo de convergência.

7.12. Considere a sequência $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$ em $[0,1]$. Calcule: (a) $\lim_{n\to\infty} f_n$; (b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$; (c) $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$. A convergência de (f_n) é uniforme?

7.13. Considere as sequências $f_n(x) = 1/(1 + nx)$ e $g_n(x) = x/(1 + nx)$, ambas definidas em $(0,1)$. Prove que (f_n) converge pontualmente mas não uniformemente, e que (g_n) converge uniformemente.

7.14. Seja $f_n(x) = e^{-n^2x^2}/n$. (a) Prove que (f_n) converge uniformemente em $\mathbb{R}$ e que (f_n') converge pontualmente em $\mathbb{R}$, mas a convergência de (f_n') não é uniforme em nenhum intervalo que contenha a origem.

7.15. Seja $f_n(x) = x/(1 + nx^2)$ para $x \in \mathbb{R}$.
(a) Encontre a função limite f da sequência (f_n) e a função limite g da sequência (f_n').
(b) Prove que $f'(x)$ existe para todo x mas $f'(0) \neq g(0)$. Para que valores de x tem-se $f'(x) = g(x)$?

(c) Em que subintervalos de $\mathbb{R}$ tem-se $f_n \to f$ uniformemente?
(d) Em que subintervalos de $\mathbb{R}$ tem-se $f'_n \to g$ uniformemente?

7.16. Prove que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ são uniformemente convergentes em $\mathbb{R}$ se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente.

7.17. Mostre que a sequência $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ converge pontualmente em $\mathbb{R}$ mas a convergência não é uniforme.

7.18. Para cada uma das sequências (f_n) abaixo, determine o seu limite pontual (se existir) e decida se a convergência é uniforme no intervalo indicado:
(a) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ em $[0,1]$;
(b) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ em $\mathbb{R}$;
(c) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ em $(0,\infty)$.

7.19. Prove que a função de Dirichlet pode ser definida por $f_D(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} [\cos(m!\pi x)]^{2n}$.

7.20. Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

7.21 Prove que a expansão binomial

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{x^{n+1}}{2n+2}$$

converge uniformemente para $-1 \le x \le 1$. Sugestão: Problema 1.22.

7.22. Considere $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ onde

$$f_n(x) = 2(n+1)^2 x e^{-(n+1)^2 x^2} - 2n^2 x e^{-n^2 x^2}.$$

(a) Mostre que, para $x > 0$,

$$\int_0^x f(t)\,dt = e^{-x^2} - 1$$

e compare com

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x f_n(t)\,dt.$$

(b) Mostre que $|R_n(1/n)| = 2n/e$, onde $R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x)$. O que se pode concluir sobre o tipo de convergência da série que define f?

7.23. Se f é contínua no intervalo compacto $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,x^n\,dx = 0 \quad (n = 0,1,2,\ldots),$$

prove que $f = 0$ em $[a,b]$. Sugestão: a integral do produto de f por qualquer polinômio é zero, e o teorema de aproximação de Weierstrass garante que existe uma sequência de polinômios que converge uniformemente para f em $[a,b]$.

7.24. Seja

$$f(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \quad (t > 0). \tag{7.51}$$

(a) Prove que

$$f'(t) = -\frac{1}{1+t^2} \quad (t > 0) \tag{7.52}$$

e conclua que

$$f(t) = C - \arctan t \quad (t > 0) \tag{7.53}$$

para alguma constante C.

(b) Considerando a sequência $(f(n))$, prove que $C = \pi/2$. Sugestão: teorema da convergência dominada (Apêndice A).

7.25. Considere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cos n^2 x.$$

(a) Prove que f é infinitamente diferenciável. (b) Prove que $f^{(2k-1)}(0) = 0$ e

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}(n^2)^{2k}.$$

(c) Obtenha a seguinte estimativa para a magnitude do termo de ordem $2k$ da série de Taylor de f:

$$\left|\frac{f^{2k}(0)\,x^{2k}}{(2k)!}\right| > e^{-n}(n^2)^{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

onde n é qualquer número natural. (d) Tome $n = 2k$, note que $(2k)! < (2k)^{2k}$ e mostre que

$$\left|\frac{f^{(2k)}(0)\,x^{2k}}{(2k)!}\right| > e^{-2k}(2k)^{2k}x^{2k} = \left(\frac{2kx}{e}\right)^{2k}.$$

Dado $x \neq 0$, tomando k suficientemente grande prove que o termo geral da série de Taylor para f não tende a zero. Conclua que f é uma função infinitamente diferenciável cuja série de Taylor é divergente em todo $x \neq 0$.

Parte III

Elementos de Análise Funcional

Pure mathematics and physics are becoming ever more closely connected, though their methods remain different. One may describe the situation by saying that the mathematician plays a game in which he himself invents the rules while the physicist plays a game in which the rules are provided by Nature, but as time goes on it becomes increasingly evident that the rules which the mathematician finds interesting are the same as those which Nature has chosen.

P. A. M. Dirac

8

Topologia, Espaços Métricos e Espaços Normados

Um conjunto munido de uma *topologia* constitui a arena mais abstrata em que podem ser definidas as noções de limite e continuidade, que até aqui dependeram de propriedades *métricas* dos conjuntos considerados. Lembremos que na reta real diz-se que o número real p é ponto de acumulação (às vezes chamado de ponto-limite) de $A \subset \mathbb{R}$ se para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $0 < |x - p| < \epsilon$, isto é, em qualquer vizinhança aberta de p existe um ponto de A *distinto* de p. De um modo talvez excessivamente geral, pode-se dizer (Hocking & Young 1961) que um conjunto X tem uma topologia se para cada subconjunto A de X faz sentido perguntar se o ponto $p \in X$ é ponto de acumulação de A. Para que se torne possível responder a esta pergunta, é preciso dotar o conjunto X de uma estrutura apropriada.

8.1 *Espaços Topológicos*

A estrutura a ser definida é produto de longa experiência dos matemáticos com pontos, curvas e superfícies no espaço euclidiano, bem como com entidades matemáticas tais como espaços vetoriais e grupos.

Definição 8.1 *Dado um conjunto não vazio X, uma* **topologia** *em X consiste numa coleção τ de subconjuntos de X, chamados de* **conjuntos abertos**, *que preenchem as seguintes condições:*
(Top1) *O conjunto inteiro X e o conjunto vazio $\varnothing$ são membros de τ.*
(Top2) *Se $U \in \tau$ e $V \in \tau$ então $U \cap V \in \tau$.*

(Top3) *Se* Λ *é um conjunto arbitrário de índices e* A_λ *pertence a* τ *para cada* $\lambda \in \Lambda$, *então a união*

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ também pertence a } \tau.$$

Em outras palavras, a união de uma coleção qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto. Aplicações sucessivas de (Top2) estabelecem que uma interseção *finita* de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Exemplo 8.1.1

Uma topologia sempre situa-se entre dois extremos. Um extremo é ocupado pela **topologia indiscreta, trivial** ou **caótica**, que consiste em tomar X e $\varnothing$ como os únicos conjuntos abertos: $\tau = \{\varnothing, X\}$. Evidentemente, nenhuma topologia pode ter menos conjuntos abertos do que esta. No extremo oposto encontra-se a **topologia discreta**, em que todos os subconjuntos de X são abertos: $\tau = \mathscr{P}(X)$. Nenhuma topologia pode ter mais conjuntos abertos do que a topologia discreta.

Exemplo 8.1.2

A reta real. Um exemplo mais relevante é a **topologia padrão** definida no conjunto dos números reais. Um subconjunto O de $\mathbb{R}$ é dito aberto se é o conjunto vazio ou se para cada ponto $x \in O$ existe $\epsilon > 0$ tal que o intervalo $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ está contido em O. A coleção de todos os conjuntos abertos de $\mathbb{R}$ assim definidos constitui uma topologia em $\mathbb{R}$, denotada por $\tau_{\mathbb{R}}$. Para comprovar isto, comecemos notando que (Top1) vale porque $\varnothing$ e $\mathbb{R}$ evidentemente são abertos. Se O_λ é uma família qualquer de conjuntos abertos, sua união $\bigcup_\lambda O_\lambda$ é um conjunto aberto. De fato, se $x \in \bigcup_\lambda O_\lambda$ então $x \in O_{\lambda_0}$ para algum λ_0. Como O_{λ_0} é aberto, existe um intervalo $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ contido em O_{λ_0} e, em consequência, contido em $\bigcup_\lambda O_\lambda$. Isto prova a validade de (Top3): qualquer união de conjuntos abertos é um conjunto aberto. Finalmente, sejam O_1 e O_2 conjuntos abertos e considere $O_1 \cap O_2$. Se $x \in O_1 \cap O_2$ então $x \in O_1$ e $x \cap O_2$. Como O_1 e O_2 são abertos, existem $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$ tais que $(x-\epsilon_1, x+\epsilon_1) \subset O_1$ e $(x-\epsilon_2, x+\epsilon_2) \subset O_2$. Tomando $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ resulta que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset O_1 \cap O_2$, de modo que $O_1 \cap O_2$ é

aberto e fica estabelida a validade de (Top2). A **reta real** é o conjunto dos números reais com a topologia padrão.

Definição 8.2 *Um* ***espaço topológico*** *é um conjunto não vazio X juntamente com uma topologia τ em X. Mais formalmente, um espaço topológico é um par ordenado (X,τ) onde τ é uma topologia em X.*

Usualmente nos referimos ao espaço topológico (X,τ) simplesmente como X quando a topologia τ está subentendida. Os elementos de X, independentemente de sua natureza, são chamados genericamente de *pontos*.

Convergência e Conjuntos Fechados

A coleção de conjuntos abertos permite definir o conceito de ponto de acumulação num espaço topológico.

Definição 8.3 *Seja X um espaço topológico. Um ponto $p \in X$ é* ***ponto de acumulação*** *de $A \subset X$ se todo conjunto aberto que contém p também contém um ponto de A distinto de p.*

O conjunto dos pontos de acumulação de A é denotado por A' e chama-se conjunto *derivado* de A. O **fecho** $\bar{A}$ de A é o conjunto obtido agregando-se a A todos os seus pontos de acumulação: $\bar{A} = A \cup A'$.

Exercício 8.1.1
Seja X um conjunto com pelo menos dois elementos. Considere a pergunta "$p \in X$ é um ponto de acumulação de $A \subset X$?" Mostre que no caso da topologia trivial a resposta é sempre "sim" e que no caso da topologia discreta a resposta é sempre "não".

Dado um espaço topológico X, um conjunto $A \subset X$ é dito uma **vizinhança** do ponto $x \in X$ se existe um conjunto aberto O tal que $x \in O$ e $O \subset A$. Se A é aberto diz-se que A é uma **vizinhança aberta** de x. Num espaço topológico a noção de convergência de uma sequência é introduzida de modo natural.

Definição 8.4 *Num espaço topológico X uma sequência (x_n) de pontos de X* ***converge*** *para $x \in X$ se para qualquer vizinhança aberta O de x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in O$ para todo $n > N$.*

Num espaço topológico X todos os conjuntos de interesse são subconjuntos de X. Portanto, falaremos simplesmente em complemento de cada subconjunto A de X para nos referirmos ao complemento relativo a X: $A^c = X \setminus A$.

Definição 8.5 *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto F de X é* ***fechado*** *se e somente se o seu complemento F^c é aberto.*

Exercício 8.1.2
Dado um espaço topológico (X, τ), seja $\mathscr{F}(\tau)$ a coleção de todos os subconjuntos fechados de X. Prove que:
(i) O conjunto vazio $\varnothing$ e o espaço inteiro X pertencem a $\mathscr{F}(\tau)$.
(ii) Se $F_1 \in \mathscr{F}(\tau)$ e $F_2 \in \mathscr{F}(\tau)$ então $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}(\tau)$.
(iii) A interseção de uma coleção arbitrária de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Note que, de acordo com este exercício, o conjunto vazio $\varnothing$ e o espaço inteiro X são ao mesmo tempo abertos e fechados. Na Seção 5.4 definimos conjunto fechado como aquele que contém todos os seus pontos de acumulação, de modo que é preciso estabelecer a equivalência entre aquela definição e esta última.

Teorema 8.6 *Num espaço topológico X um subconjunto F de X é fechado se e somente se contém todos os seus pontos de acumulação.*

Demonstração. *Suficiência.* Suponha que F contém todos os seus pontos de acumulação. Então $p \in F^c$ não é ponto de acumulação de F. Logo, existe um conjunto aberto O_p que contém p mas não contém nenhum ponto de F. A união $\bigcup_p O_p$ de todos esses conjuntos é igual a F^c e é um conjunto aberto pelo axioma (Top3). Segue-se que F é fechado. *Necessidade.* Suponha que F é fechado e seja $p \in F^c$. Então F^c é um conjunto aberto que contém p mas não contém nenhum ponto de F. Portanto, $p \in F^c$ não é ponto de acumulação de F, de modo que F contém todos os seus pontos de acumulação . ∎

Outra propriedade sumamente importante dos conjuntos fechados é a de conter os limites de sequências convergentes de elementos do conjunto.

Teorema 8.7 *Se F é um conjunto fechado de um espaço topológico X, o limite de toda sequência convergente composta por elementos de F pertence a F.*

Demonstração. Seja $F \subset X$ um conjunto fechado de um espaço topológico X. Suponha que existe uma sequência (x_n) de elementos de F que converge para x mas $x \notin F$. Por definição de convergência, qualquer que seja a vizinhança aberta O_x de x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in O_x$ para todo $n > N$. Isto significa que qualquer vizinhança aberta de x contém pontos de F diferentes de x, já que $x_n \in F$ mas $x \notin F$. Segue-se que x é um ponto de acumulação de F que não está em F. Portanto, F não é fechado. ∎

COMPARAÇÃO E GERAÇÃO DE TOPOLOGIAS

Como num dado conjunto não vazio X é possível introduzir diversas topologias, é conveniente introduzir um critério de comparação entre elas.

Definição 8.8 *Sejam τ_1 e τ_2 topologias em X. Dizemos que τ_1 é **mais fina** ou **mais forte** que τ_2 se $\tau_2 \subset \tau_1$. Neste caso, dizemos que τ_2 é **mais grossa** ou **mais fraca** que τ_1.*

Em outras palavras, uma topologia τ_1 é mais forte do que outra topologia τ_2 se τ_1 tem mais conjuntos abertos do que τ_2.

Exercício 8.1.3

Se τ_1 e τ_2 são topologias em X, prove que a interseção $\tau_1 \cap \tau_2$ também é uma topologia em X.

O resultado deste último exercício motiva a definição de topologia gerada por uma coleção de subconjuntos de X.

Definição 8.9 *Seja $\mathcal{U}$ uma coleção de subconjuntos do conjunto não vazio X. A **topologia gerada por** $\mathcal{U}$, denotada por $\tau(\mathcal{U})$, é a interseção de todas as topologias que contêm $\mathcal{U}$.*

Note que esta definição faz sentido porque, mesmo na situação mais extrema, pelo menos a topologia discreta $\mathscr{P}(X)$ contém $\mathscr{U}$. Observe, ainda, que $\tau(\mathscr{U})$ é a mais fraca de todas as topologias que contêm $\mathscr{U}$.

Exemplo 8.1.3
Na reta real seja $\mathscr{U}$ a coleção de intervalos abertos da forma $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ com $x \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$. A topologia gerada por $\mathscr{U}$ é a topologia padrão da reta real: $\tau(\mathscr{U}) = \tau_{\mathbb{R}}$. A fim de confirmar isto, notemos inicialmente que $\tau(\mathscr{U}) \subset \tau_{\mathbb{R}}$ porque, por definição, $\tau(\mathscr{U})$ é a *menor* topologia que contém todos os intervalos abertos e $\tau_{\mathbb{R}}$ é uma topologia que contém todos os intervalos abertos. Basta, portanto, provar que $\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau(\mathscr{U})$. Se $O \in \tau_{\mathbb{R}}$ e $x \in O$ então, por definição de conjunto aberto, existe um intervalo $(x-\epsilon_x, x+\epsilon_x)$ tal que $(x-\epsilon_x, x+\epsilon_x) \subset O$, onde $\epsilon_x > 0$ pode depender do ponto x. Como cada intervalo $(x-\epsilon_x, x+\epsilon_x)$ está contido em O e cada ponto de O pertence a um desses intervalos, é imediato que

$$O = \bigcup_{x \in O} (x-\epsilon_x, x+\epsilon_x).$$

Como qualquer união de membros de $\tau(\mathscr{U})$ pertence a $\tau(\mathscr{U})$ por tratar-se de uma topologia, segue-se que $O \in \tau(\mathscr{U})$. Portanto, $\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau(\mathscr{U})$ e a demonstração está completa.

8.2 *Espaços de Hausdorff*

Topologias são estruturas extremamente gerais e podem conduzir a situações altamente patológicas, entre as quais destaca-se a impossibilidade de separar pontos distintos num espaço topológico. Por este motivo, diversas condições mais restritivas, conhecidas como **axiomas de separação**, costumam ser impostas sobre espaços topológicos.

Axioma T_0. Dados dois pontos de um espaço topológico X, pelo menos um deles pertence a um conjunto aberto que não contém o outro.

Axioma T_1. Dados dois pontos de um espaço topológico X, cada um deles pertence um conjunto aberto que não contém o outro.

Axioma T_2. (*Axioma de Hausdorff*) Dados dois pontos de um espaço topológico X, existem conjuntos abertos *disjuntos* cada um contendo apenas um dos pontos.

Estes axiomas estão listados em ordem crescente de força no seguinte sentido: T_2 implica T_1 e T_1 implica T_0. O terceiro axioma é o mais importante e caracteriza os espaços de Hausdorff.

Definição 8.10 *Um **espaço de Hausdorff** é um espaço topológico que satisfaz o Axioma T_2.*

Um espaço topológico com a topologia indiscreta claramente não é um espaço de Hausdorff. Fora este caso extremo, pode parecer que todo espaço topológico é necessariamente um espaço de Hausdorff, mas isto não é verdade. Um exemplo mais elaborado é o seguinte: seja X um conjunto infinito e sejam definidos como abertos, juntamente com $\varnothing$ e X, todos os *complementos* de subconjuntos *finitos* de X. Não é difícil verificar que essa coleção de conjuntos abertos define uma topologia em X. Sejam O_1 e O_2 dois conjuntos abertos em X. Da identidade $(O_1 \cap O_2)^c = O_1^c \cup O_2^c$ deduz-se que $O_1 \cap O_2 \neq \varnothing$ porque, em caso contrário, teríamos $X = O_1^c \cup O_2^c$, que é impossível porque O_1^c e O_2^c são finitos mas X é infinito. Portanto, dois abertos nessa topologia nunca são disjuntos e o axioma de Hausdorff não se cumpre. Estes exemplos são reconhecidamente artificiais, mas ilustram a enorme liberdade oferecida pelos axiomas definidores de uma topologia.

Espaços mais gerais do que os de Hausdorff raramente são usados, seja na Matemática ou na Física. Os espaços de Hausdorff têm algumas propriedades particularmente agradáveis.

Teorema 8.11 *Num espaço de Hausdorff uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração. Suponha que x e $\tilde{x}$ sejam limites distintos da sequência (x_n) formada por elementos do espaço topológico X. Existem conjuntos abertos O e $\tilde{O}$ tais que $O \cap \tilde{O} = \varnothing$ com $x \in O$ e $\tilde{x} \in \tilde{O}$. Como (x_n) converge para x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in O$ para todo $n > N$, de modo que $x_n \notin \tilde{O}$ para todo $n > N$. Segue-se que (x_n) não converge para $\tilde{x}$, o que contraria a hipótese de partida. ∎

Exercício 8.2.1

Se X é um espaço de Hausdorff, prove que todo ponto x de X, visto como um subconjunto de X, é fechado.

Exemplo 8.2.1
A reta real é um espaço de Hausdorff. Cada ponto da reta real é um conjunto fechado.

Como regra geral, nossa intuição é bastante confiável para espaços topológicos de Hausdorff, mas é enganada com muito mais frequência quando lidamos com espaços topológicos que não são de Hausdorff.

8.3 *Espaços Métricos*

Uma topologia permite dar respostas a perguntas de natureza qualitativa sobre o espaço topológico correspondente. Informações quantitativas podem ser obtidas se estiver definida uma distância entre pontos do referido espaço. De maneira geral, pode-se dizer que a topologia caracteriza a *forma* do espaço, enquanto a *geometria* é determinada pelas relações métricas vigentes no espaço.

Definição 8.12 *Dado um conjunto não vazio X, uma* ***métrica*** *ou* ***distância*** *em X é uma função* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *que associa a cada par ordenado de elementos* $x,y \in X$ *um número real* $d(x,y)$ *tal que:*
(M1) $d(x,y) \geq 0$ *para todos os* $x,y \in X$;
(M2) $d(x,y) = 0$ *se e somente se* $x = y$;
(M3) $d(x,y) = d(y,x)$ *para todos os* $x,y \in X$;
(M4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *para todos os* $x,y,z \in X$.

(M1) e (M2) são as condições de positividade e (M3) é a condição de simetria. A condição (M4) é chamada de **desigualdade triangular** ou **desigualdade do triângulo** e transporta para um contexto abstrato o resultado da geometria elementar de que cada lado de um triângulo é menor do que a soma dos outros dois.

Definição 8.13 *Um* ***espaço métrico*** *é um conjunto não vazio X dotado de uma métrica d. Mais formalmente, um espaço métrico é um par ordenado* (X,d) *onde d é uma métrica em X.*

Exemplos de Espaços Métricos

Passaremos a apresentar alguns exemplos importantes de espaços métricos. Tipicamente, apenas a verificação de (M4) pode trazer alguma dificuldade para cada métrica proposta.

Exemplo 8.3.1

Espaço métrico discreto. Qualquer conjunto não vazio X pode ser tornado um espaço métrico por meio da **métrica discreta** definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

O espaço (X,d) assim obtido é chamado de *espaço métrico discreto*. Embora não tenha interesse para aplicações, este espaço é útil para ilustrar alguns conceitos e serve de alarme contra certas armadilhas traiçoeiras.

Exemplo 8.3.2

A reta real $\mathbb{R}$ é um espaço métrico com a métrica usual ou padrão

$$d(x,y) = |x-y|.$$

Antes de continuar com os exemplos, é necessário introduzir um resultado auxiliar muito importante, que será generalizado futuramente.

Teorema 8.14 (Desigualdade de Schwarz)

Sejam $\{a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n\}$ *números reais. Então vale a desigualdade de Schwarz*[1]

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big). \tag{8.1}$$

1. Também conhecida como *desigualdade de Cauchy-Schwarz* ou *desigualdade de Cauchy-Schwarz--Bunyakovski.*

Exercício 8.3.1
Prove a identidade

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j - a_j b_i)^2$$

e dela deduza a desigualdade de Schwarz.

Exemplo 8.3.3
O **espaço euclidiano** $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico com a *métrica euclidiana*

$$d(x,y) = \sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2},$$

onde $x=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ e $y=(\eta_1,\ldots,\eta_n)$. A fim de demonstrar (M4), seja $z=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ e façamos $a_k=\xi_k-\eta_k$ e $b_k=\eta_k-\zeta_k$, de modo que $a_k+b_k=\xi_k-\zeta_k$. Então, pela desigualdade de Schwarz,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big| + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\\ &\le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\\ &= \Big(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\Big)^2.\end{aligned}$$

Por extração da raiz quadrada, desta desigualdade deduz-se (M4):

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\zeta_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\eta_k-\zeta_k)^2}.$$

Exercício 8.3.2
Outras métricas possíveis em $\mathbb{R}^n$ são

$$d_1(x,y) = |\xi_1-\eta_1|+\cdots+|\xi_n-\eta_n| \quad \text{e} \quad d_2(x,y) = \max\{|\xi_1-\eta_1|,\ldots,|\xi_n-\eta_n|\}.$$

Mostre que d_1 e d_2 satisfazem os axiomas (M1)-(M4).

Exemplo 8.3.4

Espaço das funções contínuas $C[a,b]$**.** Neste caso X é o conjunto das funções reais contínuas no intervalo compacto $I = [a,b]$. Introduzindo a métrica

$$d(f,g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$$

obtemos um espaço métrico denotado por $C[a,b]$. Podemos trocar o supremo pelo máximo na definição da métrica, pois qualquer função contínua num intervalo fechado e limitado assume o seu valor máximo.

Exercício 8.3.3

Prove que

$$\tilde{d}(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

também define uma métrica no conjunto das funções reais contínuas em $[a,b]$.

Antes do próximo exemplo, que é bastante importante, necessitamos de uma generalização da desigualdade de Schwarz com integrais no lugar de somas.

Teorema 8.15 (Desigualdade de Schwarz para Integrais) *Quaisquer que sejam as funções reais* f *e* g *de quadrado integrável no intervalo* (a,b)*, vale a desigualdade de Schwarz para integrais*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt. \qquad 8.2$$

Exercício 8.3.4

Prove a identidade

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 = \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt - \frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b [f(s)g(t) - f(t)g(s)]^2 ds dt$$

e dela deduza a desigualdade de Schwarz para integrais.

Exemplo 8.3.5
Espaço de funções $L^2_{cont}[a,b]$. Novamente X é o conjunto das funções reais contínuas no intervalo $[a,b]$, mas agora a métrica é

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} . \qquad 8.3$$

O espaço métrico assim obtido, denotado por $L^2_{cont}[a,b]$, chama-se *espaço das funções contínuas com métrica quadrática.*

Exercício 8.3.5
Com a ajuda da desigualdade de Schwarz para integrais, prove que (8.3) define uma métrica no conjunto das funções reais contínuas em $[a,b]$.

Exemplo 8.3.6
Espaço das sequências limitadas l^∞. Agora X é o conjunto das sequências limitadas de números complexos, isto é, cada $x \in X$ com $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ satisfaz

$$|\xi_i| \leq c_x \text{ para todo } i \in \mathbb{N},$$

onde c_x é um número positivo que pode depender da sequência x. Se $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots)$ pertence a X definimos a métrica

$$d(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i| .$$

O espaço métrico assim obtido é denotado por l^∞. Para verificar (M4) basta notar que

$$|\xi_i - \zeta_i| = |\xi_i - \eta_i + \eta_i - \zeta_i| \leq |\xi_i - \eta_i| + |\eta_i - \zeta_i|$$

donde

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \zeta_i| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \left(|\xi_i - \eta_i| + |\eta_i - \zeta_i| \right) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i| + \sup_{i \in \mathbb{N}} |\eta_i - \zeta_i| .$$

As próximas ilustrações — Exemplos 8.3.7 e 8.3.8 — requerem o uso de duas outras desigualdades importantes, uma das quais generaliza a desigualdade de Schwarz. A demonstração da primeira delas será baseada numa desigualdade auxiliar.

Definição 8.16 *Os números p e q são ditos **expoentes conjugados** se $p > 1$, $q > 1$ e*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{8.4}$$

Lema 8.17 *Sejam p e q expoentes conjugados. Se $a,b \geq 0$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \tag{8.5}$$

Demonstração. A desigualdade (8.5) é óbvia se $a = 0$ ou $b = 0$. Suponhamos, portanto, que $a,b > 0$. Considere a função $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = xy - \frac{x^p}{p}, \quad y > 0, \tag{8.6}$$

cujas primeiras derivadas são

$$f'(x) = y - x^{p-1}, \quad f''(x) = -(p-1)x^{p-2}. \tag{8.7}$$

Como $p > 1$, segue-se que $f(x)$ assume seu valor máximo para $x_0 = y^{1/(p-1)} = y^{q-1}$, onde usamos $1/(p-1) = q-1$ (verifique). Portanto, $f(x) \leq f(x_0)$ implica

$$xy - \frac{x^p}{p} \leq y^{q-1}y - \frac{y^{p(q-1)}}{p} = \left(1-\frac{1}{p}\right)y^q = \frac{y^q}{q}, \tag{8.8}$$

que coincide com (8.5). ∎

Teorema 8.18 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $\{a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n\}$ números reais ou complexos. Se p e q são expoentes conjugados, vale a* desigualdade de Hölder

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}. \tag{8.9}$$

Demonstração. Observemos que a desigualdade de Hölder é homogênea, isto é, se vale para os vetores $a = (a_1,\ldots,a_n)$ e $b = (b_1,\ldots,b_n)$ então vale

igualmente para os vetores λa e μb com λ e μ números arbitrários. Basta, portanto, provar a desigualdade para o caso em que

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q = 1,$$

que sempre pode ser realizado escolhendo $\lambda^{-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p}$ e $\mu^{-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}$. Neste caso, a desigualdade a ser provada reduz-se a

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq 1. \tag{8.10}$$

Pondo $a = |a_k|$, $b = |b_k|$ em (8.5) e somando sobre k resulta

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p}{p} + \frac{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Provamos, assim, a desigualdade (8.10) e, por conseguinte, a desigualdade de Hölder geral. ∎

Note que a desigualdade de Schwarz é um caso particular da desigualdade de Hölder com $p = q = 2$. A partir da desigualdade de Hölder prova-se uma outra desigualdade importante.

Teorema 8.19 (Desigualdade de Minkowski) *Sejam* $\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$ *números reais ou complexos e seja* $p \geq 1$. *Então vale a* desigualdade de Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}. \tag{8.11}$$

Demonstração. Se $p = 1$, a desigualdade (8.11) é imediata. Se $p > 1$, comecemos escrevendo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p &= \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|\,|a_k + b_k|^{p-1} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(|a_k| + |b_k|\right)|a_k + b_k|^{p-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,|a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |b_k|\,|a_k + b_k|^{p-1}.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|\,|a_k + b_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k||a_k+b_k|^{p-1} \le \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^{(p-1)q}\Big)^{1/q},$$

donde

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^p \le \Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\Big)^{1/p}\Big]\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^{(p-1)q}\Big)^{1/q}.$$

Usando $(p-1)q = p$ e dividindo esta última desigualdade por $\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\Big)^{1/q}$ resulta

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^p\Big)^{1-1/q} \le \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\Big)^{1/p},$$

que é a desigualdade de Minkowski já que $1-1/q = 1/p$. ∎

Passando ao limite $n \to \infty$, as desigualdades de Hölder e de Minkowski permanecem válidas para sequências (a_k) e (b_k), desde que as séries correspondentes sejam convergentes, e também para integrais.

Teorema 8.20 (Desigualdade de Hölder para Integrais) *Sejam p e q expoentes conjugados. Se $|f|^p$ e $|g|^q$ são integráveis no intervalo **limitado ou ilimitado** (a,b), então $|fg|$ é integrável em (a,b) e*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \Big(\int_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{1/p}\Big(\int_a^b |g(x)|^q dx\Big)^{1/q}. \qquad 8.12$$

Note que esta desigualdade generaliza a desigualdade de Schwarz para integrais, que corresponde ao caso particular $p = q = 2$. A mesma observação aplica-se à desigualdade de Hölder para sequências.

Teorema 8.21 (Desigualdade de Minkowski para Integrais) *Seja $p \ge 1$. Se $|f|^p$ e $|g|^p$ são integráveis no intervalo **limitado ou ilimitado** (a,b), então $|f+g|^p$ é integrável em (a,b) e*

$$\Big(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\Big)^{1/p} \le \Big(\int_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^b |g(x)|^p dx\Big)^{1/p}. \qquad 8.13$$

Exercício 8.3.6
Prove 8.12 e 8.13.

Exemplo 8.3.7
Espaço de sequências l^p. Agora X é o conjunto das sequências de números complexos $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ tais que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p, \quad p \geq 1$$

é convergente. Se $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots) \in X$ definimos a métrica

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{1/p}. \qquad 8.14$$

O espaço métrico assim obtido é denotado por l^p.

Exemplo 8.3.8
Espaço de funções $L^p(a,b)$. Seja X o conjunto das funções reais ou complexas definidas no intervalo **limitado ou ilimitado** (a,b) e tais que $f \in X$ se e somente se $|f|^p$ é integrável em (a,b). A métrica em X é definida por

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \qquad 8.15$$

com a identificação de funções que só diferem num conjunto de medida zero (vide Apêndice A). O espaço métrico resultante é denotado por $L^p(a,b)$. Com a ajuda da desigualdade de Hölder para integrais prova-se imediatamente que d é uma métrica. O caso $p = 2$ é particularmente importante, pois representa o espaço das funções de quadrado integrável, que desempenha uma papel central na mecânica quântica. Por exemplo, $L^2(\mathbb{R}^3)$ é o espaço de estados de uma partícula sem spin em três dimensões.

Exercício 8.3.7
Prove, com a ajuda das desigualdades (8.11) e (8.13), que cada uma das funções (8.14) e (8.15) introduzidas nos Exemplos 8.3.7 e 8.3.8 é métrica no respectivo espaço.

Exemplo 8.3.9
Espaço $B(A)$ das funções limitadas. Seja X o conjunto das funções complexas limitadas definidas num conjunto A. Com a métrica

$$d(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$$

resulta um espaço métrico (X,d) que se denota por $B(A)$ — a letra B indica "bounded", que significa "limitado" em inglês.

Topologia e Convergência em Espaços Métricos

Num espaço métrico há uma topologia que decorre naturalmente da definição de conjunto aberto em termos da métrica.

Definição 8.22 *Seja x um ponto de um espaço métrico (X,d) e r um número real positivo. A* ***bola aberta*** *$B(x,r)$ de* ***centro*** *x e* ***raio*** *r é o conjunto dos pontos de X que distam menos que r do ponto x:*

$$B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}.$$

A ***bola fechada*** *$B[x,r]$ de* ***centro*** *x e* ***raio*** *r é o conjunto dos pontos de X cuja distância a x é menor ou igual a r:*

$$B[x,r] = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}.$$

Como guia à nossa intuição, interpretamos a bola aberta $B(x,r)$ como uma esfera de raio r com centro em x que não inclui os pontos da superfície esférica. A bola fechada inclui tanto os pontos interiores da esfera quanto os pontos de sua superfície. Desde logo é bom chamar atenção para o fato de que, dependendo da métrica, a forma da "bola" pode ser muito diferente do que o nome sugere.

Exemplo 8.3.10

Sejam $x = (\xi_1, \xi_2)$ e $y = (\eta_1, \eta_2)$ pontos de $\mathbb{R}^2$. No plano $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana

$$d(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}$$

e as métricas

$$d_1(x,y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2| \quad \text{e} \quad d_2(x,y) = \max\{|\xi_1 - \eta_1|, |\xi_2 - \eta_2|\},$$

as bolas abertas $B(x,r)$ tomam as formas geométricas representadas na figura abaixo.
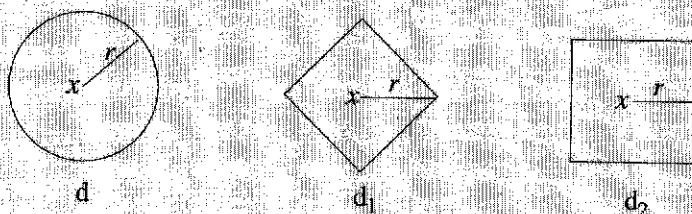
Fig. 8.1 *Bolas abertas no plano para as métricas d (euclidiana), d_1 e d_2 do Exemplo 8.3.10.*

Um alerta: embora em $\mathbb{R}^n$ o fecho $\overline{B(x,r)}$ da bola aberta $B(x,r)$ seja a bola fechada $B[x,r]$, isto não é verdade em geral.

Exemplo 8.3.11

No espaço métrico discreto do Exemplo 8.3.1, considere a bola aberta $B(x,1)$. Como $d(x,y) = 1$ para todo $y \neq x$ e $B(x,1)$ é composta pelos pontos y com $d(x,y) < 1$, temos $B(x,1) = \{x\}$. Nenhum $y \neq x$ é ponto de acumulação de $B(x,1)$ porque a bola $B(y,1) = \{y\}$ é uma vizinhança aberta de y que é disjunta de $\{x\}$. Portanto, o conjunto dos pontos de acumulação de $B(x,1)$ é vazio e temos $\overline{B(x,1)} = B(x,1) = \{x\}$. Por outro lado, $B[x,1] = X \neq \overline{B(x,1)}$.

Definição 8.23 *Num espaço métrico (X,d) um conjunto $A \subset X$ é dito aberto se e somente se para cada $x \in A$ existe uma bola aberta $B(x,r) \subset A$.*

A topologia gerada pela coleção de todas as bolas abertas em $B(x,r)$ define uma topologia natural em X, chamada de **topologia métrica.** Esta topologia coincide com a topologia definida pela coleção de todos os conjuntos abertos de X. A demonstração deste fato baseia-se nos mesmos argumentos empregados no Exemplo 8.1.3 para a reta real. Todo espaço métrico é um espaço topológico com a topologia (induzida pela) métrica. A recíproca não é verdadeira: uma topologia nem sempre é induzida por uma métrica. Um espaço topológico (X,τ) é dito **metrizável** se é possível introduzir uma métrica d em X de tal modo que τ é a topologia métrica induzida por d. Pode-se provar[2] que a chamada *linha de Sorgenfrey*, constituída pelo conjunto dos números reais com a topologia gerada pela coleção de todos os intervalos semiabertos $[a,b)$, não é metrizável.

Definição 8.24 *Um espaço métrico (X,d) é dito **limitado** se* $\sup_{x,y\in X} d(x,y) < \infty$.

Os espaços métricos mais interessantes e úteis, tanto para a Matemática quanto para a Física, são ilimitados. Mas é proveitoso saber que qualquer espaço métrico pode ser tornado limitado por uma escolha adequada da métrica (Problema 8.3).

Dada a enorme variedade de métricas que podem ser introduzidas num dado conjunto não vazio, é importante definir em que circunstâncias duas métricas são tidas como equivalentes.

Definição 8.25 *Duas métricas d_1 e d_2 num conjunto X são ditas **equivalentes** se existem números $a > 0$ e $b > 0$ tais que*

$$a\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq b\, d_1(x,y)$$

para todos os $x,y \in X$.

Verifica-se com facilidade que duas métricas equivalentes geram exatamente a mesma coleção de conjuntos abertos. Portanto, duas métricas equivalentes são topologicamente equivalentes, pois geram a mesma topologia métrica.

2. Vide, por exemplo, Bognár (2011).

Exemplo 8.3.12

Produto cartesiano de espaços métricos. Sejam (X,d_1) e (Y,d_2) espaços métricos. O produto cartesiano $X \times Y$ pode ser dotado de uma métrica definindo a distância entre dois pontos quaisquer $z = (x,y)$ e $z' = (x',y')$ de $X \times Y$ por

$$d'(z,z') = d_1(x,x') + d_2(y,y')$$

ou

$$d''(z,z') = \max\{d_1(x,x'), d_2(y,y')\}$$

ou, ainda,

$$d(z,z') = \sqrt{d_1(x,x')^2 + d_2(y,y')^2}.$$

Estas métricas são equivalentes e, portanto, geram a mesma topologia métrica em $X \times Y$. A terceira métrica corresponde ao caso de produto cartesiano de espaços euclidianos. Como são todas equivalentes, e algebricamente é mais fácil lidar com d', esta é a métrica preferida quando (X,d_1) e (Y,d_2) são espaços métricos arbitrários.

Exercício 8.3.8

Prove que as funções d, d' e d'' do Exemplo 7.3.12 são métricas em $X \times Y$. Prove, também, que essas três métricas são equivalentes.

Definição 8.26 *Num espaço métrico (X,d) diz-se que uma sequência (x_n)* ***converge para o ponto*** *$x \in X$ se e somente se $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$. De forma equivalente, (x_n) converge para x se e somente se para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x,\epsilon)$ para todo $n > N$.*

No Problema 8.2 você provará que a métrica é uma função contínua de seus argumentos, isto é, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ em (X,d) segue-se que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$.

Teorema 8.27 *Todo espaço métrico é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração. Sejam x e y dois pontos distintos de um espaço métrico (X,d), de modo que $r = d(x,y) > 0$. Então a bola aberta $B(x,r/2)$ contém

x e a bola aberta $B(y,r/2)$ contém y, bastando provar que elas são disjuntas. Suponha que existe $z \in B(x,r/2) \cap B(y,r/2)$. Neste caso, pela desigualdade triangular, temos

$$r = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

que é um absurdo. ∎

Segue-se deste resultado e do Teorema 8.11 que o limite de uma sequência num espaço métrico é único.

8.4 *Aplicações Contínuas, Homeomorfismos e Isometrias*

A definição de continuidade de funções reais de uma variável real estende-se de modo natural a aplicações entre espaços métricos. Se X e Y são espaços métricos e $T : X \to Y$ é uma aplicação qualquer de X em Y, por simplicidade notacional escreveremos simplesmente Tx para denotar a imagem do ponto $x \in X$ pela aplicação T, em lugar da notação tradicional $T(x)$.

Definição 8.28 *Sejam (X,d) e $(Y,\tilde{d})$ espaços métricos. Uma aplicação $T : X \to Y$ é **contínua no ponto** $x_0 \in X$ se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x,x_0) < \delta$ implica $\tilde{d}(Tx,Tx_0) < \epsilon$. A aplicação T é dita **contínua** se é contínua em todos os pontos de X.*

Esta definição coincide com a usual para aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ bastando escrever $d(x,y) = \tilde{d}(x,y) = |x-y|$.

Um resultado importante estabelece que funções contínuas podem ser caracterizadas exclusivamente por conjuntos abertos.

Teorema 8.29 *Uma aplicação T do espaço métrico (X,d) no espaço métrico $(Y,\tilde{d})$ é contínua se e somente se a imagem inversa de qualquer conjunto aberto de Y é um conjunto aberto de X.*

Demonstração. *Necessidade.* Suponha que T é contínua. Seja $V \subset Y$ um conjunto aberto e $U = T^{-1}(V)$. Se $U = \varnothing$ não há nada a demonstrar porque $\varnothing$ é um aberto de X. Se $U = T^{-1}(V) \neq \varnothing$, sejam $x_0 \in U$ e $y_0 = Tx_0 \in V$. Como V é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que a bola aberta $\tilde{B}(y_0,\epsilon) \subset V$, isto é, $\tilde{d}(y,y_0) < \epsilon$ para todo $y \in \tilde{B}(y_0,\epsilon)$. Como T é contínua, existe $\delta > 0$ tal que a bola aberta

$B(x_0,\delta)$ é mapeada em $\tilde{B}(y_0,\epsilon)$, ou seja, $d(x,x_0) < \delta$ implica $\tilde{d}(Tx,Tx_0) < \epsilon$, como mostra a Fig. 8.2.
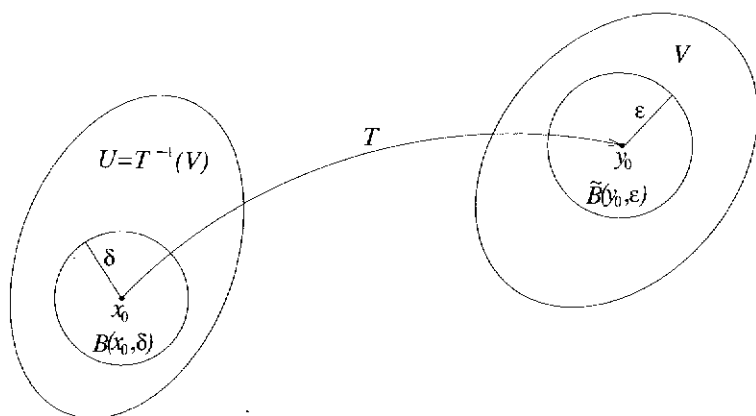
Fig. 8.2 *Aplicação contínua entre espaços métricos.*

Como $B(x_0,\delta) \subset U$ e x_0 é um ponto qualquer de U, segue-se que U é um aberto de X. *Suficiência.* Suponha que a imagem inversa de qualquer aberto de Y é um aberto de X. Então, para todo $x_0 \in X$ e toda bola aberta $\tilde{B}(y_0,\epsilon)$ com $y_0 = Tx_0$, temos que $T^{-1}(\tilde{B}(y_0,\epsilon))$ é um aberto de X. Logo, existe $\delta > 0$ tal que a bola aberta $B(x_0,\delta) \subset T^{-1}(\tilde{B}(y_0,\epsilon))$, ou seja, a imagem direta de $B(x_0,\delta)$ está contida em $\tilde{B}(y_0,\epsilon)$. Isto significa que $d(x,x_0) < \delta$ implica $\tilde{d}(Tx,Tx_0) < \epsilon$, de modo que T é contínua porque $x_0 \in X$ é arbitrário. ∎

Este teorema motiva a definição geral de aplicação contínua de um espaço topológico em outro.

Definição 8.30 *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é dita* ***contínua*** *se a imagem inversa $f^{-1}(V)$ de qualquer conjunto aberto $V \subset Y$ é um conjunto aberto de X.*

Decorre desta definição que a composição de duas aplicações contínuas entre espaços topológicos é também contínua.

Teorema 8.31 *Sejam X, Y, Z espaços topológicos. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são contínuas, então $g \circ f$ é contínua.*

Demonstração. Seja $W \subset Z$ um conjunto aberto. Como g é contínua, $V = g^{-1}(W)$ é um aberto de Y, donde $U = f^{-1}(V)$ é um aberto de X porque f é contínua. Segue-se que $g \circ f$ é contínua porque $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}\big(g^{-1}(W)\big) = U$ é um aberto de X. ∎

Uma noção central da topologia é a de homeomorfismo.

Definição 8.32 *Sejam X e Y espaços topológicos. Se $f : X \to Y$ é uma aplicação bijetiva contínua cuja inversa f^{-1} também é contínua, diz-se que f é um **homeomorfismo** e que os espaços topológicos X e Y são **homeomorfos**.*

Espaços homeomorfos são indistinguíveis do ponto de vista topológico. O principal objetivo da topologia é encontrar **invariantes topológicos** — propriedades que são preservadas por homeomorfismos. Essas propriedades podem ser números reais ou características qualitativas, tais como compacidade e conexidade (ver Seção 8.6). O objetivo último da topologia é descobrir invariantes topológicos que caracterizem completamente um espaço topológico. Os homeomorfismos desempenham na topologia o mesmo papel que os isomorfismos na álgebra (reveja a Seção 3.5): espaços topológicos homeomorfos são considerados apenas diferentes realizações de uma mesma estrutura.

Exemplo 8.4.1
O intervalo aberto $(-1,1)$ e a reta real $(-\infty,\infty)$ são espaços homeomorfos. Um homeomorfismo é

$$y = \tan\frac{\pi x}{2}, \quad x \in (-1,1).$$

Do ponto de vista topológico, o intervalo aberto $(-1,1)$ e a reta real inteira são indistinguíveis.

Isometrias são aplicações entre espaços métricos que preservam distâncias entre pontos.

Definição 8.33 *Sejam (X,d) e $(Y,\tilde{d})$ espaços métricos. Uma aplicação bijetiva $T : X \to Y$ é uma **isometria** se*

$$d(x,y) = \tilde{d}(Tx,Ty)$$

para todos os $x,y \in X$.

Dois espaços métricos entre os quais se pode estabelecer uma isometria são ditos **espaços isométricos**. As relações métricas entre dois espaços isométricos são exatamente as mesmas: os espaços só diferem quanto à natureza dos seus elementos. Do ponto de vista da teoria dos espaços métricos, dois espaços isométricos são considerados idênticos.

8.5 *Espaços Topológicos Separáveis*

Conjuntos densos desempenham um papel extremamente importante na análise funcional, e sua definição mais geral se dá no âmbito dos espaços topológicos

Definição 8.34 *Um conjunto D num espaço topológico X é **denso** em X se o fecho de D coincide com o espaço inteiro, isto é, se $\bar{D} = X$.*

Note que dizer que D é denso em X é o mesmo que dizer que todo ponto de X pertence a D ou é ponto de acumulação de D. Num espaço métrico, isto significa que para cada ponto p de X existe um ponto de D cuja distância a p é arbitrariamente pequena. Em espaços métricos existe uma caracterização importante dos conjuntos densos.

Teorema 8.35 *O conjunto D é denso no espaço métrico (X,d) se e somente se para cada $x \in X$ existe uma sequência de elementos de D que converge para x.*

Demonstração. *Necessidade.* Suponha que D é denso em X, isto é, $\bar{D} = X$. Então qualquer $x \in X$ pertence a D ou é ponto de acumulação de D. Se $x \in D$ a sequência constante $x_n = x$ para todo n converge para x. Se x é ponto de acumulação de D, para cada elemento da sequência de números positivos $\epsilon_n = 1/n$ existe $x_n \in D$ distinto de x e tal que $d(x_n,x) < \epsilon_n = 1/n$. Logo, $x_n \to x$. *Suficiência.* Suponha que D não é denso em X. Então existe $x \in X$ que não é ponto de acumulação de D, isto é, existe uma bola aberta $B(x,r)$ que não contém pontos de D. Segue-se que nenhuma sequência de elementos de D pode convergir para x. ∎

Entre todos os espaços topológicos, os que possuem um subconjunto enumerável denso constituem uma classe especialmente importante. Em particular, todos os espaços de Hilbert da mecânica quântica pertencem a essa classe.

Definição 8.36 *Um espaço topológico é dito* ***separável*** *se contém um subconjunto enumerável denso.*

Exemplo 8.5.1
A reta real é separável, pois o conjunto dos números racionais é enumerável e denso em $\mathbb{R}$. O espaço euclidiano n-dimensional é separável: o conjunto $\mathbb{Q}^n$ dos pontos com coordenadas racionais é um subconjunto enumerável denso em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 8.5.2
O espaço de funções $C[a,b]$ é separável. De acordo com o famoso teorema da aproximação de Weierstrass (Figueiredo 1996, p. 229; Boas, Jr. 1996, p. 129), num intervalo fechado e limitado qualquer função contínua pode ser aproximada arbitrariamente e uniformemente por um polinômio. Mais precisamente, dado $\epsilon > 0$ existe um polinômio $p(x)$ tal que

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Por sua vez, um polinômio pode ser aproximado arbitrariamente e uniformemente em $[a,b]$ por um polinômio de mesmo grau com coeficientes racionais (prove isto). A coleção de todos os polinômios com coeficientes racionais é um conjunto enumerável denso em $C[a,b]$. O mesmo argumento mostra que o espaço das funções contínuas em $[a,b]$ com métrica quadrática (Exemplo 8.3.5) também é separável.

Exemplo 8.5.3
O espaço das sequências limitadas l^∞ do Exemplo 8.3.6 não é separável. A fim de provar esta afirmação, consideremos o conjunto $s_{(0,1)} \subset l^\infty$ formado pelas sequências compostas apenas pelos números zero e um. A distância entre duas dessas sequências é igual a 1:

$$d(x,y) = \sup\{|\xi_1 - \eta_1|, |\xi_2 - \eta_2|, |\xi_3 - \eta_3|, \dots\} = 1$$

porque os elementos das sequências x e y só podem diferir por 1 e esta é a maior diferença possível. O conjunto $s_{(0,1)}$ tem a cardinalidade do contínuo, pois pode-se associar bijetivamente uma sequência $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de 0s e 1s a cada $y_x \in [0,1]$ definido por

$$y_x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \cdots$$

em termos de sua representação na base 2. As bolas abertas de raio 1/2 centradas em cada ponto de $s_{(0,1)}$ são todas disjuntas. Se existisse um conjunto enumerável denso em l^∞, cada ponto desse conjunto pertenceria a somente uma das referidas bolas abertas. Isto estabeleceria uma bijeção entre $s_{(0,1)}$ e o referido conjunto enumerável denso. Mas isto é impossível porque $s_{(0,1)}$ não é enumerável.

8.6 *Compacidade e Conexidade*

Conjuntos fechados e limitados da reta real, tais como os intervalos $[a,b]$, são chamados de conjuntos compactos, os quais desempenham um papel muito importante na Análise.

Definição 8.37 *Uma coleção de conjunto abertos $\mathcal{O} = \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é dita uma* ***cobertura aberta*** *de um conjunto A se $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$. Se $\mathcal{O}' = \{O_1, \ldots, O_n\} \subset \mathcal{O}$ é uma subcoleção finita cuja união contém A, diz-se que $\mathcal{O}'$ é uma* ***subcobertura finita*** *de A.*

Um resultado clássico da Análise, conhecido como teorema de Heine--Borel, garante que um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ é fechado e limitado — contido em alguma bola $B(0,r)$ centrada na origem — se e somente se toda cobertura aberta de A possui uma subcobertura finita (Rudin 1976). Esse teorema motiva a definição de conjunto compacto num espaço topológico.

Definição 8.38 *Seja (X,τ) um espaço topológico. Um conjunto $K \subset X$ é dito* ***compacto*** *se toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita. Se X é compacto, diz-se que (X,τ) é um* ***espaço compacto****.*

Passemos a examinar algumas das propriedades mais elementares dos conjuntos compactos.

Teorema 8.39 *Todo subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto.*

Demonstração. Seja (X,τ) um espaço compacto e $F \subset X$ um conjunto fechado. Se $\mathcal{O} = \{O_\lambda\}$ é uma cobertura aberta de F, juntando-se F^c a $\mathcal{O}$ resulta uma cobertura aberta $\{\mathcal{O}, F^c\}$ de X, já que F^c é aberto. Como X é compacto, esta cobertura aberta admite uma subcobertura finita $\{O_1, \ldots, O_n, F^c\}$. Como nenhum elemento de F pertence a F^c, todos estão em $\{O_1, \ldots, O_n\}$, que é uma subcobertura finita de F. Portanto, F é compacto. ∎

Teorema 8.40 *Todo conjunto compacto num espaço de Hausdorff é fechado.*

Demonstração. Seja (X,τ) um espaço de Hausdorff e $K \subset X$ compacto. Queremos mostrar que K^c é aberto. Seja $y \in K^c$. Para todo $x \in K$ existem conjuntos abertos U_x e V_x tais que $x \in U_x$, $y \in V_x$ e $U_x \cap V_x = \varnothing$. A coleção $\{U_x\}_{x \in K}$ é uma cobertura aberta de K, que admite uma subcobertura finita $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$ porque K é compacto. O conjunto aberto

$$V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \cdots \cap V_{x_n}$$

é uma vizinhança aberta de y que é disjunta de

$$U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n}.$$

Como isto vale para cada $y \in K^c$, a união de todas essas vizinhanças abertas de pontos de K^c é igual a K^c. Segue-se que K^c é um conjunto aberto. ∎

Teorema 8.41 *A imagem contínua de um espaço compacto é um espaço compacto.*

Demonstração. Seja (X,τ) um espaço compacto e f uma aplicação contínua e sobrejetiva de X no espaço topológico Y. Seja $\{V_\lambda\}$ uma cobertura aberta de Y. Como f é contínua, $\{U_\lambda = f^{-1}(V_\lambda)\}$ é uma cobertura aberta de X. Logo, como X é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita $\{U_1, \ldots, U_n\}$ de X. A coleção $\{f(U_1), \ldots, f(U_n)\} = \{V_1, \ldots, V_n\}$ é uma subcobertura finita de Y. Portanto, Y é compacto. ∎

Este teorema mostra que a compacidade é um invariante topológico: um homeomorfismo leva espaços compactos em espaços compactos.

Conjuntos compactos em espaços métricos têm *algumas* das propriedades dos conjuntos compactos em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 8.42 *Todo conjunto compacto num espaço métrico é fechado e limitado.*
Demonstração. Seja K um conjunto compacto num espaço métrico. Que K é fechado decorre dos Teoremas 8.27 e 8.40. Basta, portanto, provar que K é limitado. Seja $\{B(x,r)\}$ uma cobertura de K por bolas abertas de mesmo raio $r > 0$. Como K é compacto, uma coleção finita $\{B(x_1,r),\ldots,B(x_n,r)\}$ cobre K. Seja

$$D = \max_{i,j} d(x_i,x_j)$$

a maior distância entre os centros de todas as bolas. Então, se x e y são pontos quaisquer de K, $x \in B(x_k,r)$ para algum k e $y \in B(x_l,r)$ para algum l. Consequentemente, pela desigualdade triangular,

$$d(x,y) \leq d(x,x_k) + d(x_k,x_l) + d(x_l,y) \leq r + D + r = D + 2r \quad \forall x,y \in K.$$

Segue-se que K é um conjunto limitado. ∎

Cuidado! A recíproca não é verdadeira: um conjunto fechado e limitado num espaço métrico não é necessariamente compacto.

Um espaço é desconexo se pode ser expresso como a união de dois conjuntos abertos disjuntos: $X = O_1 \cup O_2$ com $O_1 \cap O_2 = \varnothing$. Neste caso, $O_1^c = O_2$ e $O_2^c = O_1$, de modo que O_1 e O_2 são ao mesmo tempo abertos e fechados. Reciprocamente, se algum conjunto $O \subset X$ é ao mesmo tempo aberto e fechado, $X = O \cup O^c$ é a união de conjuntos abertos disjuntos. Estas observações motivam a definição de espaço topológico conexo.

Definição 8.43 *Um espaço topológico (X,τ) é* ***conexo*** *se $\varnothing$ e X são os únicos subconjuntos de X que são ao mesmo tempo abertos e fechados.*

Exemplo 8.6.1
A reta real é conexa. Mas se extrairmos um só ponto da reta real, o espaço que sobra não é conexo. Se retirarmos um único ponto de $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$, o espaço que sobra continua sendo conexo.

Assim como a compacidade, a conexidade é um invariante topológico.

Teorema 8.44 *A imagem contínua de um espaço conexo é um espaço conexo.*

Demonstração. Sejam (X,τ_1) e (Y,τ_2) espaços topológicos e seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua e sobrejetiva. Suponha que (Y,τ_2) não seja conexo, de modo que $Y = V_1 \cup V_2$ com V_1, V_2 abertos e $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Como f é contínua,

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2),$$

com

$$f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing.$$

Logo, X não é conexo porque é a união de dois abertos disjuntos. ∎

8.7 *Espaços Métricos Completos*

É impossível exagerar a importância da completeza dos números reais para a Análise. A reta real é o mais simples de todos os *espaços métricos completos*, cujas propriedaddes passamos a considerar. A completeza da reta real pode ser caracterizada tanto pelo axioma do supremo quanto pela propriedade equivalente de toda sequência de Cauchy de números reais ser convergente. Esta última caracterização é a que melhor se presta a generalização para espaços métricos arbitrários.

Definição 8.45 *Uma sequência (x_n) num espaço métrico (X,d) é uma **sequência fundamental** ou **de Cauchy** se para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,x_m) < \epsilon$ para todos os $m,n > N$.*

Definição 8.46 *Um espaço métrico X é **completo** se toda sequência de Cauchy em X converge para um elemento de X.*

Exemplo 8.7.1

A reta real $\mathbb{R}$ e o plano complexo $\mathbb{C}$ são espaços métricos completos com a métrica usual $d(x,y) = |x - y|$ (ver Seção 4.4).

Exercício 8.7.1

Prove que o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ — ver Exemplo 8.3.3 — é um espaço métrico completo.

Tipicamente, a demonstração da completeza de um espaço métrico X apoia-se na completeza dos números reais ou complexos e requer a execução de três tarefas.

(1) Para cada sequência de Cauchy em X, identificar um candidato a limite da sequência.

(2) Provar que o candidato é de fato limite da sequência.

(3) Provar que o limite da sequência pertence a X.

Dos exemplos de espaços métricos apresentados na Seção 8.3, vários deles são completos.

Teorema 8.47 *O espaço l^∞ é completo.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em l^∞, com $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, \ldots)$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \epsilon \text{ para todos os } m, n > N$$

e, *a fortiori*, para cada i fixo,

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \epsilon \text{ para todos os } m, n > N. \qquad \textbf{8.16}$$

Assim, para cada i fixo, a sequência $(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \xi_i^{(3)}, \ldots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais ou complexos. Segue-se que existe o $\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i$. A sequência $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ é a candidata óbvia a limite da sequência de Cauchy (x_n). A fim de provar que (x_n) converge para x, passemos ao limite $m \to \infty$ em (8.16) para obter

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i| = \lim_{m\to\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| \leq \epsilon \text{ para todo } n > N.$$

Segue-se que

$$d(x_n, x) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leq \epsilon \text{ para todo } n > N,$$

o que prova que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Resta provar que $x \in l^\infty$. Para tanto, note que, com $n > N$,

$$|\xi_i| = |\xi_i - \xi_i^{(n)} + \xi_i^{(n)}| \leq |\xi_i - \xi_i^{(n)}| + |\xi_i^{(n)}| \leq \epsilon + c_n, \;\; c_n = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(n)}|,$$

que não depende de i e estabelece que x é uma sequência limitada. ∎

Teorema 8.48 *O espaço l^p é completo.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy de elementos de l^p, com a mesma notação anterior $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, \ldots)$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p\Big)^{1/p} < \epsilon \text{ para todos os } m, n > N. \tag{8.17}$$

Para cada i fixo temos

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^p < \epsilon^p \implies |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \epsilon \ \forall m, n > N. \tag{8.18}$$

Como para cada i fixo a sequência $(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \xi_i^{(3)}, \ldots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais ou complexos, existe $\xi_i = \lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)}$ e $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ é o candidato natural a limite de (x_n). De (8.17) deduz-se

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p < \epsilon^p \ \forall m, n > N. \tag{8.19}$$

Passando ao limite $m \to \infty$ no primeiro membro desta desigualdade resulta

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p \leq \epsilon^p \text{ para todo } n > N.$$

Finalmente, passando ao limite $k \to \infty$, obtém-se

$$d(x_n, x) = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p\Big)^{1/p} \leq \epsilon \text{ para todo } n > N.$$

Isto prova que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Resta provar que $x \in l^p$. Tomando $n > N$ temos, pela desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\Big)^{1/p} &= \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} + \xi_i - \xi_i^{(n)}|^p\Big)^{1/p} \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^{(n)}|^p\Big)^{1/p} \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p\Big)^{1/p} + \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $x_n \in l^p$, segue-se que a série $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p$ é convergente (tem soma finita), demonstrando que $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) \in l^p$. ∎

Teorema 8.49 *O espaço $C[a,b]$ é completo.*
Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $C[a,b]$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_n, f_m) = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \text{ para todos os } m,n > N. \qquad 8.20$$

Esta última desigualdade implica

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \ \forall m,n > N \text{ e } \forall x \in [a,b]. \qquad 8.21$$

Segue-se que, para cada $x \in [a,b]$, $f_n(x)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Portanto, existe uma função f tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para cada $x \in [a,b]$. Passando ao limite $m \to \infty$ em (8.21) resulta

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \ \forall n > N \text{ e } \forall x \in [a,b]. \qquad 8.22$$

Isto significa que (f_n) converge para f não apenas pontualmente, mas *uniformemente* em $[a,b]$. Pelo Teorema 7.4, o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas é uma função contínua. Portanto, $f \in C[a,b]$ e a demonstração está completa. ∎

Comentário. De acordo com a demonstração deste último teorema, a métrica do supremo é a métrica da convergência uniforme.

Os espaços L^p — Exemplo 8.3.8 — são completos. Isto é o que afirma o teorema de Riesz-Fischer, cuja demonstração encontra-se no Apêndice A.

Teorema 8.50 *Qualquer subconjunto fechado F de um espaço métrico completo (X,d) é também um espaço métrico completo com a métrica em F definida pela restrição de d a F.*
Demonstração. Basta recorrer ao Teorema 8.7. ∎

ESPAÇOS MÉTRICOS INCOMPLETOS

O mais simples de todos os espaços métricos incompletos é o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais com a métrica usual $d(x,y) = |x - y|$.

Exemplo 8.7.2

Espaço dos polinômios. O conjunto dos polinômios num intervalo fechado da reta real com a métrica do supremo não é completo. Para provar isto, basta escolher uma sequência de polinômios que convirja uniformemente para uma função contínua que não seja um polinômio. Por exemplo,

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

converge uniformemente para e^x em qualquer intervalo fechado de $\mathbb{R}$.

Teorema 8.51 *O espaço $L^2_{cont}[a,b]$ não é completo.*

Demonstração. Por simplicidade, e sem perda de generalidade, consideremos o intervalo $[0,2]$. Precisamos mostrar que existe uma sequência de Cauchy (f_n) em $L^2_{cont}[0,2]$ que não converge em $L^2_{cont}[0,2]$. Consideremos a sequência de funções contínuas

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}.$$

Com $n > m$ temos

$$\begin{aligned} d(f_n,f_m)^2 &= \int_0^2 |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \\ &= \int_0^1 |x^n - x^m|^2 dx = \int_0^1 (x^{2n} - 2x^{m+n} + x^{2m}) dx \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{m+n+1} + \frac{1}{2m+1} < \frac{1}{2m} + \frac{2}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{2}{\min\{m,n\}}. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, tomando $N = 2/\epsilon^2$ resulta

$$d(f_n,f_m) < \epsilon \text{ para todos os } n,m > N,$$

de modo que (f_n) é uma sequência de Cauchy. Como (f_n) converge pontualmente para a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}, \tag{8.23}$$

esta função seria a candidata natural a limite da sequência (f_n), mas $f \notin L^2_{cont}[0,2]$ porque é descontínua. Mas esta constatação não basta, é preciso provar que (f_n) não converge para nenhuma função contínua. Se (f_n) convergisse para uma função contínua g teríamos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 |f_n(x) - g(x)|^2 dx = 0.$$

A desigualdade de Minkowski permite escrever

$$\left(\int_0^2 |f(x)-g(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^2 |f(x)-f_n(x)|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_0^2 |f_n(x)-g(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \tag{8.24}$$

onde f é a função dada por (8.23). Como

$$\int_0^2 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

passando ao limite $n \to \infty$ em (8.24) teríamos

$$\int_0^2 |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$$

ou, ainda,

$$\int_0^1 |g(x)|^2 dx + \int_1^2 |1 - g(x)|^2 dx = 0.$$

Cada uma destas integrais tem que ser zero separadamente. Como g é contínua, a nulidade de cada uma destas integrais exige que tenhamos $g(x) = 0$ para todo $x \in (0,1)$ e $g(x) = 1$ para todo $x \in (1,2)$, o que é impossível devido à continuidade de g em $x = 1$. ∎

Os espaços métricos $C[a,b]$ e $L^2_{cont}[a,b]$ resultam da introdução de métricas distintas no *mesmo* conjunto das funções contínuas em $[a,b]$. A comparação do espaço métrico incompleto $L^2_{cont}[a,b]$ com $C[a,b]$, que vimos ser completo, nos ensina uma lição importante: a completeza de um espaço métrico depende crucialmente da métrica adotada.

COMPLETAMENTO DE ESPAÇOS MÉTRICOS

Sabemos que o conjunto dos números racionais não é completo, mas pode ser "completado" de modo a formar o conjunto dos números reais, no qual

$\mathbb{Q}$ é denso. Um resultado importante assegura que todo espaço métrico (X,d) pode ser completado de tal modo que X é isométrico a um subconjunto denso de seu completamento $(\tilde{X},\tilde{d})$.

Teorema 8.52 *Associado a todo espaço métrico (X,d) existe um espaço métrico completo $(\tilde{X},\tilde{d})$ que possui um subespaço $\tilde{W}$ denso em $\tilde{X}$ e isométrico a X. O espaço $(\tilde{X},\tilde{d})$, chamado de* ***completamento*** *de (X,d), é único a menos de isometrias, isto é, se $(\hat{X},\hat{d})$ é qualquer espaço métrico completo com um subespaço $\hat{W}$ denso em $\hat{X}$ e isométrico a X, então $(\tilde{X},\tilde{d})$ e $(\hat{X},\hat{d})$ são espaços isométricos.*

A demonstração deste teorema é longa mas não é particularmente difícil. A ideia fundamental consiste em definir como equivalentes duas sequências de Cauchy (x_n) e (x'_n) em X se $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x'_n)=0$. Em seguida, a partir da métrica d, define-se uma métrica $\tilde{d}$ no conjunto $\tilde{X}$ das classes de equivalência das sequências de Cauchy em X. Constrói-se uma isometria que associa a cada $x\in X$ um elemento $\tilde{x}\in\tilde{X}$ que é a classe de equivalência das sequências de Cauchy equivalentes à sequência constante $(x,x,x,\ldots)$. Prova-se que o conjunto $\tilde{W}$ desses elementos $\tilde{x}$ é denso em $\tilde{X}$ e, por construção, isométrico a X. Prova-se, finalmente, que $(\tilde{X},\tilde{d})$ é completo e único salvo por isometrias. Os detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em Kreyszig (1978, Seção 1.6).

Exemplo 8.7.3
Pode-se provar que o completamento de $L^2_{cont}[a,b]$ é o espaço $L^2(a,b)$ das funções de quadrado integrável em $[a,b]$ no sentido de Lebesgue, com a identificação de funções que só diferem num conjunto de medida nula. O resultado vale tanto para intervalos finitos quanto para intervalos infinitos.

8.8 *Norma e Espaços de Banach*

Muitos espaços métricos importantes são também espaços vetoriais, nos quais a noção de distância deriva da noção de comprimento de um vetor ou *norma*.

Definição 8.53 *Uma* ***norma*** *num espaço vetorial X sobre o corpo $\mathbb{K}$ é uma aplicação $\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}$ que associa a cada $x\in X$ o número real $\|x\|$ tal que:*
(N1) $\|x\|\geq 0$ *e* $\|x\|=0$ *se e somente se* $x=0$;

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e para todo* $x \in X$;
(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todos os* $x,y \in X$.

Os escalares podem ser números reais ou complexos, mas na maioria dos casos de interesse o corpo de escalares é o corpo dos números complexos: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. A condição (N3) é conhecida como desigualdade triangular.

Dada uma norma em X, uma distância fica imediatamente definida por

$$d(x,y) = \|x - y\|. \tag{8.25}$$

É imediato que d satisfaz os axiomas (M1)-(M3) de uma métrica, e a desigualdade triangular resulta do seguinte cálculo simples:

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \|x - z\| \\ &= \|x - y + y - z\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Diz-se que (8.25) é a **métrica proveniente da norma** ou **métrica induzida pela norma**.

Definição 8.54 *Um* ***espaço normado*** *é um par ordenado* $(X, \|\cdot\|)$ *em que* X *é um espaço vetorial e* $\|\cdot\|$ *é uma norma em* X.

Exemplo 8.8.1

O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é um espaço normado com a norma

$$\|x\| = \left(|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2\right)^{1/2}, \tag{8.26}$$

onde $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. A mesma norma faz de $\mathbb{C}^n$ um espaço normado.

Exemplo 8.8.2

O espaço de funções contínuas $C[a,b]$ é um espaço normado com a norma

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \tag{8.27}$$

que é a norma da convergência uniforme.

Exemplo 8.8.3

O espaço l^∞ das sequências limitadas é um espaço normado com a norma

$$\|x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i|, \tag{8.28}$$

onde $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$.

Exemplo 8.8.4

O espaço l^p (ver Exemplo 8.3.7) é um espaço normado com a norma

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p}, \tag{8.29}$$

onde $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$.

Exemplo 8.8.5

Com a norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \tag{8.30}$$

o espaço $L^2_{cont}[a,b]$ é um espaço normado.

Exemplo 8.8.6

O espaço $L^p(a,b)$ é um espaço normado com a norma

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \tag{8.31}$$

desde que sejam identificadas as funções que só diferem num conjunto de medida nula.

Num espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ uma sequência (x_n) converge para $x \in X$ se $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Isto é o mesmo que dizer que (x_n) converge na métrica induzida pela norma.

Exercício 8.8.1
Prove que, num espaço normado $(X, \|\cdot\|)$, tem-se

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

e, como consequência, se $x_n \to x$,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|\lim_{n\to\infty} x_n\| = \|x\|.$$

Em outras palavras, a norma é uma aplicação contínua $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$.

Uma sequência (x_n) num espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é uma sequência de Cauchy se $\|x_n - x_m\| \to 0$ para $m, n \to \infty$. Isto é o mesmo que dizer que (x_n) é uma sequência de Cauchy no espaço métrico (X, d) onde d é a métrica induzida pela norma. Se toda sequência de Cauchy em X converge para um elemento de X, o espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é dito completo.

Definição 8.55 *Um **espaço de Banach** é um espaço normado completo.*

Exemplo 8.8.7
A reta real $\mathbb{R}$ e qualquer espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ são espaços de Banach. Pelos Teoremas 8.47 e 8.48, os espaços de sequências l^∞ e l^p são espaços de Banach.

Exemplo 8.8.8
De acordo com o Teorema 8.49, $C[a,b]$ é um espaço de Banach.

Os espaços L^p são espaços de Banach; $L^2_{cont}[a,b]$ não é espaço de Banach porque não é completo.

Exercício 8.8.2
Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço normado arbitrário. Prove que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|$ existe.

Normas equivalentes definem-se exatamente do mesmo modo que métricas equivalentes.

Definição 8.56 *Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num espaço vetorial X são ditas* ***equivalentes*** *se existem números $a > 0$ e $b > 0$ tais que*

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1 \tag{8.32}$$

para todo $x \in X$.

É imediato que se $(X, \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Banach e $\|\cdot\|_2$ é uma norma equivalente a $\|\cdot\|_1$, então $(X, \|\cdot\|_2)$ também é um espaço de Banach. Pode-se provar (Kreyszig 1978; Zeidler 1995) que num espaço vetorial de dimensão finita todas as normas são equivalentes.

Leituras Adicionais Selecionadas[3]

Hocking, J. S. e Young, G. S. 1961 *Topology.*

Kolmogorov, A. N. e Fomin, S. V. 1972 *Elementos de la Teoría de Funciones y del Analisis Funcional.*

• Kreyszig, E. 1978 *Introductory Functional Analysis With Applications.*

• Lima, E. L. 1993 *Espaços Métricos.*

Munkres, W. 2000 *Topology.*

Problemas

8.1. Considere as funções $d_1(x,y) = (x-y)^2$, $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ e $d_3(x,y) = ||x| - |y||$. Alguma delas define uma métrica em $\mathbb{R}$?

8.2. Seja (X,d) um espaço métrico. (a) Prove que

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z).$$

(b) Prove a *desigualdade quadrangular*

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y').$$

(c) Se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ em (X,d), prove que $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$.

3. A lista completa de referências, com plenos detalhes bibliográficos, encontra-se na Bibliografia no fim do livro. O símbolo • destaca obras cuja leitura é altamente recomendada.

8.3. (a) Se $a,b,c \geq 0$ com $a+b \geq c$, prove que

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geq \frac{c}{1+c}.$$

Sugestão: considere a função $f(x) = x/(1+x)$. (b) Se (X,d) é um espaço métrico, prove que a função $\tilde{d}$ definida por

$$\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

também é uma métrica em X. (c) Mostre que $(X,\tilde{d})$ é um espaço métrico limitado, independentemente de X ser ou não limitado com a métrica d.

8.4. Encontre uma sequência que pertence a l^p para todo $p > 1$ mas não pertence a l^1.

8.5. Encontre uma sequência que converge para zero mas não pertence a l^p para nenhum $p \geq 1$.

8.6. Se $a_n \in \mathbb{R}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge, prove que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p}$ converge se $p > 1/2$.

8.7. Diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ num espaço normado X **converge absolutamente** se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente. Prove que se X é um espaço de Banach toda série absolutamente convergente em X é convergente. Prove que a recíproca também é verdadeira pela técnica utilizada na demonstração do Teorema A.28 do Apêndice A.

8.8. Sejam U e V subconjuntos de um espaço métrico X, com $U \subset V$. Prove que se U é denso em V e V é denso em X, então U é denso em X.

8.9. Prove que

$$\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 \sqrt{1-x^9}\, dx \leq \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Sugestão: para uma das estimativas, use a desigualdade de Schwarz.

8.10. Se $\beta > \alpha > 0$, para que valores de p a função $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha + x^\beta}$ pertence a $L^p(0,\infty)$? Dê um exemplo de valores de α e β para os quais f pertence a $L^2(0,\infty)$.

8.11. Prove que $l^q \subset l^p$ se $p > q \geq 1$, onde p e q não precisam ser expoentes conjugados.

8.12. Prove que $L^p(a,b) \subset L^q(a,b)$ se $p > q \geq 1$ e $[a,b]$ é um intervalo limitado. Sugestão: considere $\int_a^b |f|^q \cdot 1\, dx$ e aplique a desigualdade de Hölder com $p' = p/q > 1$ e seu expoente conjugado q'.

8.13. Prove que, se $p \neq q$ com $p, q \geq 1$, nem $L^p(0,\infty) \subset L^q(0,\infty)$ nem $L^q(0,\infty) \subset L^p(0,\infty)$, onde p e q não precisam ser expoentes conjugados.

8.14. Seja X um espaço normado de dimensão finita. Prove que X é completo. Informação útil: num espaço vetorial de dimensão finita todas as normas são equivalentes.

8.15. Seja c o espaço das sequências convergentes de números complexos com a norma do supremo. Prove que c é uma variedade linear fechada — logo, é um subespaço de Banach — de l^∞.

8.16. Mostre que o produto cartesiano de um número finito de espaços métricos completos é um espaço métrico completo com qualquer uma das métricas mencionadas no Exemplo 8.3.12.

8.17. Prove que o conjunto das funções continuamente diferenciáveis $C^1[a,b]$ torna-se um espaço de Banach com a norma $\|f\|_{\infty,1} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

8.18. O diâmetro diam(A) de um conjunto não vazio A num espaço métrico (X,d) é definido por

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y).$$

Se diam$(A) < \infty$ diz-se que A é limitado. (a) Prove que $A \subset B$ implica diam$(A) \leq$ diam(B). (b) Prove que $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ é uma métrica em $\mathbb{R}$. Mostre que $(\mathbb{R},d)$ é um espaço métrico limitado e incompleto.

8.19. A distância $d(A,B)$ entre dois conjuntos não vazios A e B num espaço métrico (X,d) é definida por

$$d(A,B) = \inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}} d(a,b).$$

Dê um exemplo de dois conjuntos A e B com $A \cap B = \varnothing$ e $d(A,B) = 0$.

8.20. A distância $d(x,A)$ de um ponto x a um conjunto não vazio A num espaço métrico (X,d) é definida por

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a).$$

Prove que

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

quaisquer que sejam $x,y \in X$.

8.21. Considere $C[0,2\pi]$ e determine o menor valor de r para o qual $y \in B[x,r]$ se $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \operatorname{sen} t$.

8.22. Seja (X,d) um espaço métrico. Prove que $A \subset X$ é aberto se e somente se é uma união de bolas abertas.

8.23. Seja (X,d) um espaço métrico. Se x_0 é um ponto de acumulação de $A \subset X$, prove que qualquer vizinhança de x_0 contém um infinidade de pontos de A.

8.24. Seja $B[a,b]$ o conjunto das funções limitadas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ com a métrica do supremo. Prove que $B[a,b]$ não é separável.

8.25. Se (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy num espaço métrico (X,d), prove que (d_n), com $d_n = d(x_n,y_n)$, é uma sequência convergente.

8.26. Se d_1 e d_2 são métricas equivalentes no conjunto X, prove que (X,d_1) e (X,d_2) são ambos espaços métricos completos ou ambos espaços métricos incompletos.

8.27. Seja l_c^∞ a coleção de todas as sequências complexas $x = (\xi_1,\xi_2,\ldots)$ com apenas um número finito de termos diferentes de zero e a métrica do supremo. Prove que l_c^∞ é um espaço métrico incompleto.

8.28. Seja $(\mathbb{N},d)$ o espaço dos números naturais com $d(m,n) = |m^{-1} - n^{-1}|$. (a) Prove que $(\mathbb{N},d)$ é um espaço métrico. (b) Prove que $(\mathbb{N},d)$ é um espaço métrico incompleto.

8.29. Prove que $C[0,1]$ e $C[a,b]$ são isométricos.

8.30. Prove que uma métrica d num espaço vetorial X é induzida por uma norma se e somente se $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ e $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$ quaisquer que sejam $x, y, z \in X$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

8.31. Seja $X \neq \{0\}$ um espaço vetorial com uma métrica d que deriva de uma norma. Mostre que $\tilde{d}$ definida por

$$\tilde{d}(x,x) = 0, \quad \tilde{d}(x,y) = 1 + d(x,y) \quad \text{se} \quad x \neq y$$

é uma métrica em X que não é induzida por uma norma.

8.32. Prove que um conjunto X num espaço normado é limitado se e somente se existe $C > 0$ tal que $||x|| \leq C$ para todo $x \in X$. A definição de conjunto limitado encontra-se no Problema 8.18.

8.33. Uma pseudométrica num conjunto X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaz os axiomas (M1), (M3) e (M4) que caracterizam uma métrica, mas o axioma (M2) é substituído por: (M2)′ $\quad d(x,x) = 0$. (a) Qual é a diferença entre uma métrica e uma pseudométrica? (b) Se X é conjunto das funções integráveis à Riemann em $[a,b]$, a função

$$d(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| \, dt$$

é uma métrica ou uma pseudométrica?

9

Distribuições

C'est en 1935 que j'entendis parler pour la première fois de la fonction δ; j'étais étudiant, et un camarade venai d'entendre une conferénce de physique théorique et m'en a parlé en ces termes: 'Ces gens-là introduisent une soi-disant fonction δ, nulle partout sauf à l'origine, égale à $+\infty$ à la origine, et telle que $\int \delta(x)dx = +1$. Avec des méthodes de ce genre, aucune collaboration n'est possible.' Nous y avons un peu réfléchi ensemble, et avons abandonné; je n'y ai plus repensé jusqu'en 1945.

LAURENT SCHWARTZ

A teoria das distribuições, fundada e sistematizada por Laurent Schwartz, generaliza a noção de função e, entre muitas outras coisas, empresta rigor matemático a manipulações formais envolvendo a "função" delta de Dirac — durante quase duas décadas vista com desgosto e repulsa pelos matemáticos — e suas derivadas. Nenhuma quantidade física mensurável se expressa diretamente em termos da "função" delta, que é útil para descrever formalmente distribuições puntiformes de carga ou massa. No cálculo de grandezas físicas mensuráveis, seja no eletromagnetismo ou na mecânica quântica, a "função" delta sempre aparece em integrais que são calculadas por meio da sua propriedade fundamental:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) .$$

Por meio desta expressão, a "função" delta associa a cada função um número: o valor de f na origem. Esta observação motiva a definição genérica de distribuição como uma aplicação linear que associa um número a cada membro de uma certa classe de funções.

9.1 *Definição de Distribuição*

As *distribuições*, também chamadas de *funções generalizadas*, são definidas como funcionais lineares sobre um espaço $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, ou simplesmente $\mathscr{D}$, das chamadas *funções de teste*, que passamos a descrever. Para que uma função $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ pertença a $\mathscr{D}$ é necessário e suficiente que φ seja infinitamente diferenciável e que exista um conjunto fechado e limitado $K \subset \mathbb{R}^n$ fora do qual φ é identicamente nula. Não se exige que K seja o mesmo para todas as funções $\varphi \in \mathscr{D}$. Para qualquer função $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, o seu **suporte**, denotado usualmente por $\operatorname{supp}\varphi$, é o menor conjunto *fechado* fora do qual $\varphi \equiv 0$. Equivalentemente, $\operatorname{supp}\varphi$ é o fecho do conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}^n$ para os quais $\varphi(x) \neq 0$. Como em $\mathbb{R}^n$ todo conjunto fechado e limitado é compacto (teorema de Heine-Borel), dizemos que $\varphi \in \mathscr{D}$ tem **suporte compacto**.

Definição 9.1 *O espaço $\mathscr{D}$ é o conjunto das funções complexas, infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto definidas em $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 9.1.1

Em uma dimensão ($n = 1$), a função φ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq 1 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right) & \text{se } |x| < 1 \end{cases} \tag{9.1}$$

pertence a $\mathscr{D}$. O suporte de φ é o intervalo fechado $[-1,1]$, φ é infinitamente diferenciável para $|x| \neq 1$ e também é infinitamente diferenciável em $x = \pm 1$.

Exercício 9.1.1

Prove que a função φ do Exemplo 9.1.1 é infinitamente diferenciável em $x = \pm 1$. Sugestão: basta considerar $x = 1$, pois φ é par, e, para $x \to 1$ pela esquerda, mostrar que $\lim \varphi'(x) = 0$, $\lim \varphi''(x) = 0$, etc.

Exemplo 9.1.2

Para o caso de n dimensões, a função θ_a definida por

$$\theta_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } r \geq a \\ \exp\left(-\dfrac{a^2}{a^2 - r^2}\right) & \text{se } r < a \end{cases} \quad (9.2)$$

pertence a $\mathscr{D}$, onde $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}$.

Fora do contexto da teoria das distribuições, o espaço $\mathscr{D}$ das funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto costuma ser denotado por $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou, simplesmente, C_0^∞ quando $\mathbb{R}^n$ estiver subentendido. Ocasionalmente também utilizaremos a coleção $C_0^\infty(a,b)$ das funções infinitamente diferenciáveis com suporte no intervalo (a,b).

Embora o espaço $\mathscr{D}$ pareça muito restrito, é possível provar (Schwartz 2008, Seção 2.1) que qualquer função contínua de suporte compacto pode ser uniformemente aproximada com precisão arbitrária por um elemento de $\mathscr{D}$. A partir deste resultado prova-se (Boccara 1980, Seção 2.3) que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, um resultado muito importante para a teoria dos operadores lineares em espaços de Hilbert.

Claramente, $\mathscr{D}$ é um espaço vetorial, pois se $\varphi_1 \in \mathscr{D}$ e $\varphi_2 \in \mathscr{D}$ segue-se que $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathscr{D}$, e se $\varphi \in \mathscr{D}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\lambda\varphi \in \mathscr{D}$. A fim de definir distribuição, é preciso introduzir uma topologia ou noção de convergência em $\mathscr{D}$.

Definição 9.2 (Convergência em $\mathscr{D}$) *Uma sequência (φ_n) de elementos de $\mathscr{D}$ converge para $\varphi \in \mathscr{D}$ se e somente se:*

(1) *Os suportes de todas as funções φ_n estão contidos num mesmo conjunto limitado, independente de n;*

(2) *As sequências das derivadas de qualquer ordem das funções φ_n convergem uniformemente para as derivadas correspondentes de φ.*

Cabe destacar que não é exigida a convergência uniforme de uma só vez para todas as ordens de diferenciação, mas apenas a convergência uniforme para cada ordem de diferenciação tomada em separado. Detalhes sobre uma topologia em $\mathscr{D}$ consistente com esta noção de convergência podem ser encontrados em Rudin (1973, Cap. 6).

Definição 9.3 (Distribuição) *Uma **distribuição** é um funcional linear contínuo sobre o espaço vetorial $\mathscr{D}$.*

Isto significa que uma distribuição T associa a cada $\varphi \in \mathscr{D}$ um número complexo $T(\varphi)$, que também denotaremos por $\langle T,\varphi \rangle$, tal que

$$T(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 T(\varphi_1) + \lambda_2 T(\varphi_2)$$

para todos os $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathscr{D}$ e $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}$; além disto,

$$\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = T(\varphi)$$

se (φ_n) é uma sequência de funções de teste que converge para $\varphi \in \mathscr{D}$ segundo a noção de convergência em $\mathscr{D}$.

As distribuições formam o **espaço dual topológico** de $\mathscr{D}$, denotado por $\mathscr{D}'$, o qual é um subespaço do dual $\mathscr{D}^*$, composto por todos os funcionais lineares sobre $\mathscr{D}$, contínuos ou não. $\mathscr{D}'$ é um espaço vetorial com a soma $T_1 + T_2$ e produto por um escalar λT definidos por

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)(\varphi) = \lambda_1 T_1(\varphi) + \lambda_2 T_2(\varphi)$$

para todos os $\varphi \in \mathscr{D}$ e $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Exemplo 9.1.3

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ uma função **localmente integrável**, isto é, integrável em qualquer conjunto mensurável limitado. Então f define uma distribuição T_f por meio de

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)d^n x. \tag{9.3}$$

A integração se estende apenas sobre um conjunto limitado, o suporte K de φ. Como φ é contínua e f é integrável em K, o produto $f\varphi$ é integrável em K, de modo que $T_f(\varphi)$ existe para cada $\varphi \in \mathscr{D}$. Como a linearidade é óbvia, basta provar a continuidade de T_f. Se $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathscr{D}$ temos

$$\begin{aligned}|T_f(\varphi) - T_f(\varphi_n)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\varphi(x) - \varphi_n(x))d^n x\right| \\ &\leq \int_{K'} |f(x)|\,|\varphi(x) - \varphi_n(x)|d^n x \\ &\leq \left(\int_{K'} |f(x)|d^n x\right)\max_{x\in K'}|\varphi(x) - \varphi_n(x)|\end{aligned}$$

onde K' é um conjunto fechado e limitado que contém o suporte de φ e os suportes de todos os φ_n. Mas como (φ_n) converge uniformemente para φ, resulta que

$$\max_{x \in K'} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \to 0 \quad \text{para} \quad n \to \infty$$

e T_f é um funcional linear contínuo.

Uma distribuição T é dita **regular** se existe uma função localmente integrável f tal que $T = T_f$. Uma distribuição que não é regular é dita **singular**.

Teorema 9.4 *Duas funções localmente integráveis f e g definem a mesma distribuição $T_f = T_g$ se e somente se são iguais em quase toda parte, isto é, só diferem num conjunto de medida nula.*

Demonstração. Schwartz (2008, Seção 2.1).

Se convencionamos identificar funções que são iguais em quase toda parte, este último teorema mostra que as distribuições constituem uma generalização do conceito de função localmente integrável. Dada uma função localmente integrável f, costuma-se identificá-la com a distribuição T_f que ela define e escreve-se

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, d^n x.$$

Diz-se que uma distribuição regular $T = T_f$ **é a função** f que a define.

Exemplo 9.1.4

A distribuição singular mais simples e mais importante para a Física é a **distribuição delta de Dirac** definida por

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

A distribuição δ_a no ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é definida por

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

Exemplo 9.1.5

A distribuição **valor principal de** $\frac{1}{x}$, denotada por $P\frac{1}{x}$, é definida por

$$\langle P\frac{1}{x},\varphi\rangle = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx. \qquad 9.4$$

Precisamos mostrar que esta distribuição está bem definida, embora $1/x$ não defina uma distribuição porque não é localmente integrável em nenhuma vizinhança de $x=0$. Se $[-A,A]$ é um intervalo que contém o suporte de φ,

$$\langle P\frac{1}{x},\varphi\rangle = P\int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)}{x}dx = P\int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)+\varphi(0)}{x}dx$$
$$= \varphi(0)\,P\int_{-A}^{A}\frac{dx}{x} + P\int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx.$$

Mas

$$P\int_{-A}^{A}\frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_{-A}^{-\epsilon}+\int_{\epsilon}^{A}\right)\frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0+} 0 = 0$$

porque $1/x$ é uma função ímpar. Por outro lado, a função $(\varphi(x)-\varphi(0))/x$ é contínua inclusive em $x=0$ porque

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \varphi'(0),$$

de modo que sua integral existe e o próprio símbolo de valor principal que a antecede é dispensável. Quanto à continuidade, suponha que $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathscr{D}$ e seja $[-A,A]$ é um intervalo que contém os suportes de φ e de todas as funções φ_n. Com $\chi_n = \varphi_n - \varphi$ no lugar de φ, o mesmo raciocínio anterior fornece

$$\langle P\frac{1}{x},\varphi_n\rangle - \langle P\frac{1}{x},\varphi\rangle = \int_{-A}^{A}\frac{\chi_n(x)-\chi_n(0)}{x}dx.$$

Pelo teorema do valor médio,

$$\frac{\chi_n(x)-\chi_n(0)}{x} = \chi_n'(t)\,, \quad -|x| < t < |x|,$$

donde

$$\left|\frac{\chi_n(x)-\chi_n(0)}{x}\right| \leq \max_{x\in[-A,A]}|\chi_n'(x)|.$$

Portanto,

$$\left|\langle \mathrm{P}\frac{1}{x},\varphi_n\rangle - \langle \mathrm{P}\frac{1}{x},\varphi\rangle\right| \leq 2A \max_{x\in[-A,A]} |\varphi_n'(x) - \varphi'(x)| \to 0 \text{ para } n \to \infty$$

por causa da convergência em $\mathscr{D}$, o que prova que (9.4) define um funcional linear contínuo. A distribuição $\mathrm{P}\frac{1}{x}$ também é singular.

Exemplo 9.1.6
Dado $a \in \mathbb{R}^n$ a expressão

$$\langle T,\varphi\rangle = D^p\varphi(x)\Big|_{x=a} \equiv D^p\varphi(a)$$

define uma distribuição, onde

$$D^p = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{p_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n}, \quad p_i \in \mathbb{N}_0, \qquad 9.5$$

com $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

9.2 *Derivadas de Distribuições*

A teoria das distribuições livra o cálculo diferencial de certas dificuldades decorrentes da existência de funções não diferenciáveis. Isto é conseguido estendendo as operações diferenciais às distribuições de tal modo que toda distribuição tenha derivadas que também são distribuições. Assim, toda distribuição é infinitamente diferenciável.

Para definir a derivada $\partial T/\partial x_1$ de uma distribuição T sobre $\mathbb{R}^n$, vamos exigir que no caso em que T é uma função diferenciável f a derivada de T seja a derivada de f:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1},\varphi\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}\varphi\, d^n x = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}\varphi\, dx_1$$

Integrando por partes obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}\varphi\, dx_1 = f\varphi\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 = -\int_{-\infty}^{\infty} f\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1$$

porque φ tem suporte compacto. Portanto,

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle . \tag{9.6}$$

Definição 9.5 *Se T é uma distribuição sobre $\mathbb{R}^n$, sua derivada $\dfrac{\partial T}{\partial x_k}$ é a distribuição definida por*

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle , \quad k = 1, \ldots, n. \tag{9.7}$$

A equação (9.7) define $\partial T / \partial x_k$ como distribuição porque: (i) trata-se de um funcional linear; (ii) este funcional linear é contínuo porque se $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathscr{D}$ então $\partial \varphi_n / \partial x_k$ converge para $\partial \varphi / \partial x_k$ em $\mathscr{D}$ e, como T é uma distribuição, $\langle T, \partial \varphi_n / \partial x_k \rangle$ converge para $\langle T, \partial \varphi / \partial x_k \rangle$.

Derivadas de segunda ordem calculam-se facilmente:

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_l}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_l}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_l \partial x_k} \right\rangle .$$

Mas $\varphi \in \mathscr{D}$ tem derivadas de segunda ordem contínuas, de modo que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_l \partial x_k} .$$

Consequentemente, para qualquer distribuição T,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_l \partial x_k} . \tag{9.8}$$

Mais geralmente, temos

$$\langle D^p T, \varphi \rangle = (-1)^{|p|} \langle T, D^p \varphi \rangle \tag{9.9}$$

com D^p definido por (9.5) e $|p| = p_1 + \cdots + p_n$. Um exemplo importante é o do laplaciano em $\mathbb{R}^n$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} , \tag{9.10}$$

para o qual se tem

$$\langle \Delta T, \varphi \rangle = \langle T, \Delta \varphi \rangle . \tag{9.11}$$

Exemplos Unidimensionais

Se f é diferenciável em todos os pontos, sua derivada como distribuição coincide com a distribuição associada à sua derivada, conforme (9.6). Coisas mais interessantes acontecem quando f possui descontinuidades.

Exemplo 9.2.1

A função degrau de Heaviside definida por

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{9.12}$$

é descontínua em $x = 0$ mas define uma distribuição porque é localmente integrável. Sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} \langle \theta', \varphi \rangle &= -\langle \theta, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

de modo que

$$\theta' = \delta. \tag{9.13}$$

Esta é uma igualdade entre distribuições, não entre funções, pois δ não é uma função.

Este último resultado pode ser generalizado para a distribuição T_f associada a uma função seccionalmente diferenciável. Suponha que f seja diferenciável em toda parte exceto num número finito de pontos $x_1, \ldots, x_m$, e que $\sigma_i = f(x_i + 0) - f(x_i - 0)$ seja o salto de f no ponto x_i. Então,

$$\begin{aligned} -\langle T_f, \varphi' \rangle &= -\int_{-\infty}^{x_1} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\varphi'(x)dx - \cdots - \int_{x_m}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\lim_{\epsilon \to 0+}\Big(\int_{-\infty}^{x_1-\epsilon} f(x)\varphi'(x)dx + \int_{x_1+\epsilon}^{x_2-\epsilon} f(x)\varphi'(x)dx + \\ &+ \cdots + \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx\Big). \end{aligned}$$

Integrando por partes e passando ao limite obtém-se

$$\langle T'_f, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = \sum_{i=1}^{m} \left[f(x_i + 0) - f(x_i - 0) \right] \varphi(x_i) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx,$$

onde f' denota uma função igual à derivada de f nos intervalos em que f é diferenciável; f' não existe nos pontos $x_1, \ldots, x_m$ mas isto é irrelevante para a integral acima. Portanto,

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \delta_{x_i}. \tag{9.14}$$

Exemplo 9.2.2

Derivada da distribuição $\ln|x|$. A função $\ln|x|$ é localmente integrável apesar da singularidade em $x = 0$ porque $\int \ln x dx = x \ln x - x$ e $\lim_{\epsilon \to 0+} \epsilon \ln \epsilon = 0$. Consideremos a distribuição $(\ln|x|)'$:

$$\langle (\ln|x|)', \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \ln|x| \varphi'(x) dx = -\left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty} \right) \ln|x| \, \varphi'(x) dx$$

Temos

$$\begin{aligned} -\int_0^{\infty} \ln|x| \, \varphi'(x) dx &= -\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon}^{\infty} \ln x \, \varphi'(x) dx \\ &= -\lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \ln x \, \varphi(x) \Big|_{\epsilon}^{\infty} - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \ln \epsilon \, \varphi(\epsilon) + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\} \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} -\int_{-\infty}^{0} \ln|x| \, \varphi'(x) dx &= -\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln(-x) \, \varphi'(x) dx \\ &= -\lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \ln(-x) \, \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{-\epsilon} - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ -\ln \epsilon \, \varphi(-\epsilon) + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\}. \end{aligned}$$

Somando, ficamos com

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \ln|x| \, \varphi'(x) dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \ln \epsilon \, [\varphi(\epsilon) - \varphi(-\epsilon)] + \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\}.$$

Note, ainda, que

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \ln\epsilon\,[\varphi(\epsilon)-\varphi(-\epsilon)] = \lim_{\epsilon\to 0+} \epsilon\ln\epsilon\,\frac{\varphi(\epsilon)-\varphi(-\epsilon)}{\epsilon}$$
$$= 2\varphi'(0)\lim_{\epsilon\to 0+}\epsilon\ln\epsilon = 0,$$

de modo que

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\,\varphi'(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Finalmente,

$$(\ln|x|)' = \mathrm{P}\frac{1}{x}, \tag{9.15}$$

que é o resultado pretendido.

Exemplo 9.2.3

Derivadas da distribuição delta. Temos

$$\langle\delta',\varphi\rangle = -\langle\delta,\varphi'\rangle = -\varphi'(0) \tag{9.16}$$

e, para a derivada segunda,

$$\langle\delta'',\varphi\rangle = -\langle\delta',\varphi'\rangle = \langle\delta,\varphi''\rangle = \varphi''(0). \tag{9.17}$$

Em geral,

$$\langle\delta^{(m)},\varphi\rangle = (-1)^m\varphi^m(0) \tag{9.18}$$

para qualquer $m\in\mathbb{N}$.

Exemplo 9.2.4

Dipolo elétrico. Considere um dipolo elétrico de magnitude unitária e orientado na direção x positiva, formado pelas cargas $-1/\epsilon$ em $x=0$ e $1/\epsilon$ em $x=\epsilon$. A distribuição de carga deste dipolo é

$$T^{\epsilon}_{\mathrm{dip}} = -\frac{1}{\epsilon}\delta + \frac{1}{\epsilon}\delta_\epsilon,$$

donde

$$\langle T^{\epsilon}_{\text{dip}}, \varphi\rangle = -\frac{1}{\epsilon}\langle \delta, \varphi\rangle + \frac{1}{\epsilon}\langle \delta_\epsilon, \varphi\rangle = \frac{\varphi(\epsilon)-\varphi(0)}{\epsilon}.$$

No limite de dipolo pontual localizado na origem, temos

$$\langle T_{\text{dip}}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0+}\frac{\varphi(\epsilon)-\varphi(0)}{\epsilon} = \varphi'(0) = \langle \delta, \varphi'\rangle = -\langle \delta', \varphi\rangle .$$

Portanto, a distribuição de carga de um dipolo unitário pontual situado na origem e orientado no sentido positivo do eixo x é

$$T_{\text{dip}} = -\delta' . \qquad 9.19$$

Um dipolo pontual $\mathbf{p}$ localizado em $a \in \mathbb{R}^3$ tem distribuição de carga

$$T_{\text{dip}} = -\mathbf{p}\cdot\nabla\delta_a , \qquad 9.20$$

que é a generalização óbvia de (9.19).

PRIMITIVAS DE DISTRIBUIÇÕES

Se T é uma distribuição em $\mathbb{R}$ cuja derivada é nula, sua caracterização é análoga à do cálculo diferencial de funções ordinárias.

Teorema 9.6 *Se T é uma distribuição em $\mathbb{R}$ cuja derivada é zero, então T é uma distribuição constante.*

Demonstração. Se $\dfrac{dT}{dx} = 0$ tem-se

$$\left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi\right\rangle = -\left\langle T, \frac{d\varphi}{dx}\right\rangle = 0 \ \text{ para todo } \ \varphi \in \mathscr{D},$$

isto é, T é nula sobre todo $\chi \in \mathscr{D}$ da forma $\chi = \dfrac{d\psi}{dx}$, onde $\psi \in \mathscr{D}$. Escrevendo

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \chi(t)\,dt ,$$

alguns momentos de reflexão bastam para nos convencer de que $\psi \in \mathscr{D}$, ou seja, ψ e todas as suas derivadas têm suporte compacto, se e somente se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)\,dx = 0 .$$

Dado um elemento arbitrário $\varphi \in \mathscr{D}$, seja $\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$. Tome um elemento fixo $\psi_0 \in \mathscr{D}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x)dx = 1$$

e defina $\chi = \varphi - \lambda\psi_0$. É claro que $\chi \in \mathscr{D}$ e, além disso,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x)dx = \lambda - \lambda = 0.$$

Pelo raciocínio anterior, existe $\psi \in \mathscr{D}$ tal que $\chi = \frac{d\psi}{dx}$, donde $\langle T,\chi\rangle = 0$. Consequentemente, para qualquer $\varphi \in \mathscr{D}$,

$$\langle T,\varphi\rangle = \langle T,\chi\rangle + \lambda\langle T,\psi_0\rangle = 0 + \lambda C = C\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = \langle C,\varphi\rangle \text{ onde } C = \langle T,\psi_0\rangle,$$

de modo que $T = C$. ∎

Corolário 9.7 *Se T_1 e T_2 são distribuições em $\mathbb{R}$ com derivadas iguais, então T_1 e T_2 diferem por uma distribuição constante.*

O Teorema 9.6 encontra importantes aplicações na teoria de operadores em espaços de Hilbert (vide Capítulo 12) e generaliza-se a distribuições em $\mathbb{R}^n$: se todas as derivadas parciais de uma distribuição T são nulas, T é uma distribuição constante. Há uma demonstração disto em Schwartz (1966, Cap. 2), onde também se encontrará um método de determinar primitivas de distribuições.

Exercício 9.2.1
Seja T uma distribuição em $\mathbb{R}$ tal que $T'' = 0$. Prove que $T = Ax + B$ com A e B constantes.

Equação de Laplace em $\mathbb{R}^n$ e Função de Green

Dada uma função $f(r)$, onde $r = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$, consideremos o seu laplaciano. Para $r \neq 0$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{df}{dr}\frac{x_i}{r}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{d^2 f}{dr^2}\frac{x_i}{r}\frac{x_i}{r} + \frac{df}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i}{r^2}\frac{x_i}{r}\right),$$

donde

$$\Delta f = \sum_{n=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{df}{dr}\left(\frac{n}{r} - \frac{r^2}{r^3}\right) = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{df}{dr}. \tag{9.21}$$

Se $n = 2$, uma solução de $\Delta f = 0$ é

$$f(r) = \ln r, \tag{9.22}$$

ao passo que, para $n \neq 2$, uma solução é

$$f(r) = \frac{1}{r^{n-2}}. \tag{9.23}$$

Estas funções são singulares em $r = 0$ mas são localmente integráveis (verifique) e, portanto, definem distribuições. Calculando o laplaciano de tais distribuições devemos esperar como resultado distribuições concentradas em $r = 0$.

Para $n \neq 2$ temos

$$\left\langle \Delta \frac{1}{r^{n-2}}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{1}{r^{n-2}}, \Delta\varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta\varphi \, d^n x = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{r \geq \epsilon} \frac{1}{r^{n-2}} \Delta\varphi \, d^n x. \tag{9.24}$$

A fim de calcular esta última integral lançaremos mão do teorema (segunda identidade) de Green

$$\int_V (f\Delta\varphi - \varphi\Delta f)\, d^n x = \oint_S \left(f\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial f}{\partial n}\right) da, \tag{9.25}$$

onde as derivadas normais são na direção da normal exterior à superfície fechada S que limita V. No nosso caso, V é a região *exterior* à esfera n-dimensional de raio ϵ e S é a superfície dessa esfera, de modo que o vetor

unitário normal a S dirigido para fora da região V aponta radialmente para a origem. Assim, com $f(r) = 1/r^{n-2}$ e $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{r}}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{r\geq\epsilon}\frac{1}{r^{n-2}}\Delta\varphi\, d^n x &= \int_{r=\epsilon}\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,da - \int_{r=\epsilon}\varphi\frac{\partial f}{\partial n}\,da \\ &= -\int_{r=\epsilon}\frac{1}{\epsilon^{n-2}}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,da - \int_{r=\epsilon}\varphi\frac{n-2}{r^{n-1}}\,da,\end{aligned} \tag{9.26}$$

onde usamos $\Delta f = 0$, $\partial f/\partial n = \hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla f = -df/dr = (n-2)/r^{n-1}$ e levamos em conta que a contribuição da superfície no infinito é nula porque φ tem suporte compacto.

A derivada normal $\partial\varphi/\partial n$ é limitada na superfície esférica $r = \epsilon$. De fato, usando $|x_i| \leq \epsilon$, existe $M > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{\epsilon}\right|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| \leq M \tag{9.27}$$

porque cada função $\partial\varphi/\partial x_i$ é limitada, pois é contínua num conjunto fechado e limitado que é o seu suporte. Como a área da esfera n-dimensional de raio ϵ é $S_n\epsilon^{n-1}$, usando $|\partial\varphi/\partial n| \leq M$ resulta que

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\epsilon^{n-2}}\int_{r=\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,da\right| \leq \frac{1}{\epsilon^{n-2}}\int_{r=\epsilon}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|da \leq \\ &\frac{M}{\epsilon^{n-2}}\int_{r=\epsilon}da \leq \frac{M}{\epsilon^{n-2}}S_n\epsilon^{n-1} \leq MS_n\epsilon \underset{\epsilon\to 0+}{\longrightarrow} 0.\end{aligned} \tag{9.28}$$

Quanto à última integral em (9.26), podemos escrever

$$\int_{r=\epsilon}\varphi\frac{n-2}{\epsilon^{n-1}}\,da = (n-2)\left\{\int_{r=\epsilon}\frac{\varphi(0)}{\epsilon^{n-1}}\,da + \int_{r=\epsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{\epsilon^{n-1}}\,da\right\}.$$

A primeira destas integrais calcula-se trivialmente:

$$\int_{r=\epsilon}\frac{\varphi(0)}{\epsilon^{n-1}}\,da = \frac{\varphi(0)}{\epsilon^{n-1}}\int_{r=\epsilon}da = \frac{\varphi(0)}{\epsilon^{n-1}}S_n\epsilon^{n-1} = S_n\varphi(0). \tag{9.29}$$

O integrando da segunda integral pode ser estimado com a ajuda do teorema do valor médio para funções de várias variáveis (Exercício 9.2.2 abaixo):

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \varphi(x_1,\ldots,x_n) - \varphi(0,\ldots,0) = \sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,,\quad -\epsilon < \xi_i < \epsilon,$$

onde levamos em conta que $-\epsilon \leq x_i \leq \epsilon$ sobre a superfície $r = \epsilon$. Portanto, pelo mesmo argumento que conduziu a (9.27), temos

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \right| \leq \epsilon \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\xi) \right| \leq M\epsilon,$$

donde

$$\begin{aligned} \left| \int_{r=\epsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{\epsilon^{n-1}} \, da \right| &\leq \frac{M\epsilon}{\epsilon^{n-1}} \int_{r=\epsilon} da = \\ &= \frac{M\epsilon}{\epsilon^{n-1}} S_n \epsilon^{n-1} = M S_n \epsilon \to 0 \text{ para } \epsilon \to 0+ . \end{aligned} \tag{9.30}$$

Levando os resultados (9.28), (9.29) e (9.30) em (9.26) e (9.24), resulta

$$\left\langle \Delta \frac{1}{r^{n-2}}, \varphi \right\rangle = -(n-2)\, S_n \, \varphi(0) = -(n-2)\, S_n \, \langle \delta, \varphi \rangle$$

ou, finalmente,

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2) \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \delta, \tag{9.31}$$

onde usamos $S_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ (ver Apêndice no fim desta seção). Casos particulares relevantes são:

$$\Delta |x| = 2\delta, \quad n = 1; \tag{9.32}$$

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta, \quad n = 3. \tag{9.33}$$

No Problema 9.9 você é instado a provar que

$$\Delta \ln r = 2\pi\delta \tag{9.34}$$

no caso bidimensional ($n = 2$).

Uma **solução elementar** ou **função de Green** da equação de Laplace[1] é uma distribuição G_ξ tal que

$$\Delta G_\xi = \delta_\xi, \tag{9.35}$$

ou, na linguagem simbólica da "função" delta,

$$\Delta G(x, \xi) = \delta(x - \xi). \tag{9.36}$$

1. A mesma definição aplica-se a qualquer operador diferencial linear.

A função de Green permite escrever uma solução particular da equação não homogênea[2]

$$\Delta\phi(x) = f(x) \tag{9.37}$$

na forma

$$\phi(x) = \int G(x,\xi) f(\xi) d^n\xi, \tag{9.38}$$

já que

$$\Delta\phi(x) = \int \Delta G(x,\xi)\, f(\xi) d^n\xi = \int \delta(x-\xi)\, f(\xi) d^n\xi = f(x). \tag{9.39}$$

Por exemplo, de acordo com (9.33) uma função de Green da equação de Laplace em três dimensões, na notação vetorial tradicional, é

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{9.40}$$

Apêndice: cálculo de $\mathbf{S_n}$.

Como a área de uma superfície esférica de raio r em $\mathbb{R}^n$ é $S_n r^{n-1}$, o volume da casca esférica de raio r e espessura dr é $S_n r^{n-1} dr$. Pode-se calcular facilmente S_n através do seguinte truque engenhoso:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{\pi})^n &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_n^2} dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-r^2} d^n x = \int_0^{\infty} e^{-r^2} S_n r^{n-1} dr \\
&= S_n \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^{(n-1)/2}}{2\sqrt{x}} dx \\
&= \frac{S_n}{2} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{n}{2}-1} dx \\
&= \frac{S_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),
\end{aligned}$$

donde

$$S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \tag{9.41}$$

2. Neste caso, conhecida como equação de Poisson.

Exercício 9.2.2
Prove o teorema do valor médio para funções de várias variáveis: se a função $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ e diferenciável em $(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$, então

$$f(b_1,\ldots,b_n)-f(a_1,\ldots,a_n)=\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$$

onde $a_k<\xi_k<b_k$. Sugestão: considere $g(t)=f\big(a_1+t(b_1-a_1),\ldots,a_n+t(b_n-a_n)\big)$.

9.3 *Produto de Distribuições*

É impossível definir consistentemente o produto de distribuições *arbitrárias*. Por exemplo, uma função localmente integrável f define uma distribuição, mas não há razão alguma para que f^2 seja localmente integrável. Um exemplo unidimensional simples é $f(x)=1/\sqrt{|x|}$ com $f^2(x)=1/|x|$.

O produto é bem definido quando uma distribuição é arbitrária e outra é uma função infinitamente diferenciável. Se α é uma função infinitamente diferenciável e T é uma função localmente integrável f,

$$\langle \alpha f,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}\alpha f\varphi\, d^n x=\langle f,\alpha\varphi\rangle,$$

onde é claro que $\alpha\varphi\in\mathscr{D}$. A definição do produto αT, com T arbitrária, deve se reduzir ao caso acima quando T é uma função localmente integrável.

Definição 9.8 *Se T é uma distribuição arbitrária e $\alpha:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ é uma função infinitamente diferenciável, o produto αT é a distribuição tal que*

$$\langle \alpha T,\varphi\rangle=\langle T,\alpha\varphi\rangle \quad \textit{para todo} \quad \varphi\in\mathscr{D}. \tag{9.42}$$

A função α precisa ser infinitamente diferenciável para assegurar que $\alpha\varphi\in\mathscr{D}$ sempre que $\varphi\in\mathscr{D}$. Além disso, se $\varphi_n\to\varphi$ segundo a noção de convergência em $\mathscr{D}$, é imediato que $\alpha\varphi_n\to\alpha\varphi$ em $\mathscr{D}$. Isto garante que o produto αT definido por (9.42) é um funcional linear contínuo, ou seja, é uma distribuição.

Produtos de funções pela distribuição delta ou por suas derivadas ocorrem frequentemente na Física, o que nos leva a examinar alguns casos interessantes.

Exemplo 9.3.1
De acordo com a definição acima, temos

$$\langle \alpha\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \alpha\varphi \rangle = \alpha(0)\varphi(0) = \alpha(0)\langle \delta, \varphi \rangle = \langle \alpha(0)\delta, \varphi \rangle,$$

donde

$$\alpha\delta = \alpha(0)\delta. \qquad 9.43$$

Um caso unidimensional importante é aquele em que $\alpha(x) = x$, para o qual (9.43) fornece

$$x\delta = 0, \qquad 9.44$$

um resultado simples mas de grande utilidade.

Exercício 9.3.1
Sobre a reta real ($n = 1$), prove que

$$\alpha\delta' = \alpha(0)\delta' - \alpha'(0)\delta. \qquad 9.45$$

Deste resultado, deduza

$$x\delta' = -\delta \qquad 9.46$$

e, mais geralmente,

$$x\delta^{(m)} = -m\delta^{(m-1)} \text{ e } x^m\delta^{(m-1)} = 0, \qquad 9.47$$

onde $m \in \mathbb{N}$ e $\delta^{(m)}$ é a m-ésima derivada de δ.

Um importante resultado caracteriza todas as distribuições T em $\mathbb{R}$ tais que $xT = 0$.

Teorema 9.9 *Uma distribuição T sobre $\mathbb{R}$ satisfaz $xT = 0$ se e somente se é proporcional a δ, isto é, $T = C\delta$ para algum $C \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. A suficiência decorre de (9.44). Para demonstrar a necessidade, suponhamos que T satisfaz $xT = 0$, de modo que

$$\langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle = 0 .$$

Portanto, T é nula sobre toda função $\chi \in \mathscr{D}$ da forma $\chi(x) = x\psi(x)$ com $\psi \in \mathscr{D}$. Acontece que a condição necessária e suficiente para que $\chi \in \mathscr{D}$ seja da forma $\chi(x) = x\psi(x)$ com $\psi \in \mathscr{D}$ é que se tenha $\chi(0) = 0$. Isto pode ser demonstrado por meio de um artifício tão belo quanto simples. Se $\chi \in \mathscr{D}$ e $\chi(0) = 0$ podemos escrever

$$\frac{\chi(x)}{x} = \frac{\chi(x) - \chi(0)}{x} = \int_0^1 \chi'(xt)dt .$$

Como χ é infinitamente diferenciável e o intervalo de integração é limitado, o Teorema 7.14 permite obter derivadas de todas as ordens de $\chi(x)/x$ diferenciando sob o sinal de integral. Isto estabelece que $\chi(x)/x$ é infinitamente diferenciável. Como também tem suporte compacto, $\chi(x)/x = \psi(x)$ com $\psi \in \mathscr{D}$. Seja, agora, θ_0 um elemento fixo de $\mathscr{D}$ com $\theta_0(0) = 1$ e defina, para cada $\varphi \in \mathscr{D}$,

$$\chi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\theta_0(x) .$$

Por construção, $\chi \in \mathscr{D}$ e $\chi(0) = 0$. Portanto, $\chi(x) = x\psi(x)$ para algum $\psi \in \mathscr{D}$ e $\langle T, \chi \rangle = 0$, de modo que

$$\langle T, \varphi \rangle = \varphi(0)\langle T, \theta_0 \rangle + \langle T, \chi \rangle = \varphi(0)C = \langle C\delta, \varphi \rangle \quad \text{com} \quad C = \langle T, \theta_0 \rangle ,$$

donde se conclui que $T = C\delta$. ∎

Exercício 9.3.2

Prove que

$$x\mathrm{P}\frac{1}{x} = 1 . \tag{9.48}$$

Prove que a solução geral da equação $xT = 1$ para uma distribuição T sobre $\mathbb{R}$ é $T = \mathrm{P}\frac{1}{x} + C\delta$, onde C é uma constante arbitrária.

Exercício 9.3.3
Considere a seguinte questão: será possível definir um produto comutativo e associativo de distribuições arbitrárias que concorde com a Definição 9.8? Mostre que a resposta é negativa deduzindo uma contradição das supostas igualdades $(x\delta)\mathrm{P}\frac{1}{x} = (\delta x)\mathrm{P}\frac{1}{x} = \delta(x\mathrm{P}\frac{1}{x})$.

As definições de derivada de uma distribuição e de produto de uma distribuição por uma função preservam uma das principais propriedades válidas para funções diferenciáveis.

Teorema 9.10 *Vale a regra de Leibnitz da derivada do produto:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha T) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} T + \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i}. \tag{9.49}$$

Demonstração. Por definição, para todo $\varphi \in \mathscr{D}$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha T), \varphi \right\rangle &= -\left\langle \alpha T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\left\langle T, \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha\varphi) - \varphi \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= -\left\langle T, \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha\varphi) \right\rangle + \left\langle T, \varphi \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \alpha\varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} T, \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} T, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} T + \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle
\end{aligned}$$

e a demonstração está completa. ∎

9.4 *A "Função" Delta de Dirac*

Nos textos de Física é comum se introduzir a "função" $\delta(x)$ definida pelas seguintes propriedades:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{9.50}$$

com

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1. \tag{9.51}$$

Estas propriedades são mutuamente contraditórias. Por exemplo, a função $\Delta(x) = 2\delta(x)$ assume exatamente os mesmos valores que $\delta(x)$, a saber,

$$\Delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

onde usamos a aritmética no conjunto $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ dos números reais estendidos — consulte a equação (A.2) no Apêndice A. Segue-se que sua integral deveria ser igual à da função δ. No entanto, pela linearidade da integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2\delta(x)\,dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 2,$$

de modo que as propriedades (9.50) e (9.51) são incompatíveis com qualquer noção honesta de integral. Para não gerar nenhuma contradição, o único valor que pode ser atribuído à integral de uma verdadeira função definida por (9.50) é zero.

É claro, portanto, que $\delta(x)$ não deve ser encarada como uma função de verdade, mas como um *símbolo* cujo real significado só se manifesta após a multiplicação por uma função de teste e integração sobre $\mathbb{R}$. As principais propriedades de $\delta(x)$ são listadas a seguir. A primeira delas é

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\,dx = f(0), \tag{9.52}$$

ou, numa versão generalizada,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\,dx = f(a), \tag{9.53}$$

que se reduz a (9.52) pela mudança de variável $y = x - a$. Na verdade, o intervalo de integração pode ser qualquer vizinhança arbitrariamente pequena de $x = a$. A "função" $\delta(x)$ é a representação simbólica da distribuição δ, e o mesmo se aplica a $\delta(x-a)$ relativamente à distribuição δ_a.

Como a "função" $\delta(x-a)$ é nula para $x \neq a$, resulta imediatamente que

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a), \tag{9.54}$$

O significado desta igualdade — e de quaisquer outras envolvendo a "função" delta — é que o primeiro e o segundo membros produzem o mesmo efeito

quanto multiplicados por uma função de teste e integrados sobre toda a reta real. Temos, também,

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x). \tag{9.55}$$

A fim de demonstrar isto, suponha $a > 0$ e faça $y = ax$ para obter

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) f\left(\frac{y}{a}\right)\frac{dy}{a} = \frac{f(0)}{a} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a}\delta(x) f(x) dx;$$

se $a < 0$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) f(x) dx &= \int_{\infty}^{-\infty} \delta(y) f\left(\frac{y}{a}\right)\frac{dy}{a} \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) f\left(\frac{y}{a}\right)\frac{dy}{a} = -\frac{f(0)}{a} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(-a)}\delta(x) f(x) dx.\end{aligned}$$

A propriedade (9.55) é uma caso particular de composição da "função" delta com uma função g diferenciável e possuidora de um conjunto finito de zeros simples a_n, isto é, $g(a_n) = 0$ com $g'(a_n) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ para todo x numa vizinhança suficientemente pequena de cada um dos seus zeros. Neste caso,

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - a_n)}{|g'(a_n)|}. \tag{9.56}$$

Para uma justificação deste resultado, escrevamos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(x))\varphi(x) dx = \sum_n \int_{a_n-\epsilon}^{a_n+\epsilon} \delta(g(x))\varphi(x) dx,$$

com $\epsilon > 0$ escolhido de modo que cada intervalo $(a_n - \epsilon, a_n + \epsilon)$ só contenha a raiz a_n de g. No intervalo $(a_n - \epsilon, a_n + \epsilon)$ a derivada de g não se anula, de modo que g é monótona e possui inversa. Façamos

$$y = g(x), \quad x = g^{-1}(y), \qquad x \in (a_n - \epsilon, a_n + \epsilon).$$

Então, com $\sigma_n > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{a_n-\epsilon}^{a_n+\epsilon} \delta(g(x))\varphi(x) dx &= \int_{-\sigma_n}^{\sigma_n} \delta(y)\varphi(g^{-1}(y))\frac{dy}{|g'(g^{-1}(y))|} \\ &= \frac{\varphi(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}\bigg|_{y=0} = \frac{\varphi(a_n)}{|g'(a_n)|},\end{aligned}$$

donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(x))\varphi(x)\,dx = \sum_n \frac{\varphi(a_n)}{|g'(a_n)|} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \frac{\delta(x-a_n)}{|g'(a_n)|}\varphi(x)\,dx.$$

Rigorosamente, em lugar de (9.56) devemos escrever

$$\delta \circ g = \sum_n \frac{\delta_{a_n}}{|g'(a_n)|}. \qquad 9.57$$

As propriedades (9.52) e (9.53) representam simbolicamente as equações exatas $\langle \delta,\varphi\rangle = \varphi(0)$ e $\langle \delta_a,\varphi\rangle = \varphi(a)$. Quanto a (9.54), representa $\langle f\delta_a,\varphi\rangle = \langle \delta_a, f\varphi\rangle = f(a)\varphi(a) = \langle f(a)\delta_a,\varphi\rangle$.

Exercício 9.4.1
Mostre que $\delta(|x|^{1/2}) = 0$ e que $\delta(x^2)$ não define uma distribuição. Mostre, também, que

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2a}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right], \quad a>0. \qquad 9.58$$

Esta última identidade é muito útil na teoria quântica de campos.

9.5 *Convergência de Distribuições*

Se a função g na identidade (9.57) possuir uma infinidade de zeros simples, o segundo membro será uma série infinita de distribuições. Precisamos, portanto, definir a noção de convergência de sequências e séries de distribuições.

Definição 9.11 (Convergência em $\mathscr{D}'$) *A sequência de distribuições (T_n) converge para a distribuição T quando $n \to \infty$ se e somente se a sequência de números complexos $\langle T_n,\varphi\rangle$ converge para o número complexo $\langle T,\varphi\rangle$ para cada $\varphi \in \mathscr{D}$.*

Analogamente, dizemos que a série de distribuições $\sum_n T_n$ converge para a distribuição T se e somente se a série numérica $\sum_n \langle T_n,\varphi\rangle$ converge para o número complexo $\langle T,\varphi\rangle$ para todo $\varphi \in \mathscr{D}$. De modo mais geral, se T_λ é uma família de distribuições com $\lambda \in \mathbb{C}$, dizemos que T_λ converge para T quando λ tende a λ_0 se e somente se $\lim_{\lambda\to\lambda_0} \langle T_\lambda,\varphi\rangle = \langle T,\varphi\rangle$ para todo $\varphi \in \mathscr{D}$.

Verifica-se imediatamente que, se existe, o limite é único e que o limite de uma soma é a soma dos limites. Além disso, se α é uma função infinitamente diferenciável e (T_n) converge para T, segue-se que (αT_n) converge para αT.

Teorema 9.12 *Se a sequência de distribuições (T_n) converge para a distribuição T, então a sequência de derivadas (T_n') converge para T'.*

Demonstração. Se (T_n) converge para T,

$$\lim_{n\to\infty}\langle T_n',\varphi\rangle = -\lim_{n\to\infty}\langle T_n,\varphi'\rangle = -\langle T,\varphi'\rangle = \langle T',\varphi\rangle$$

para todo $\varphi \in \mathscr{D}$. ∎

Corolário 9.13 *Toda série convergente de distribuições pode ser diferenciada termo a termo sob o sinal de somatório tantas vezes quanto se desejar.*

Sequências de Dirac

Intuitivamente, a "função" delta é o limite de uma sequência de funções com um pico muito alto e muito estreito em $x = 0$ de modo tal que a área sob a curva é igual a 1 e permanece com este valor no limite de um pico infinitamente alto e infinitamente estreito. Esta ideia intuitiva pode ser tornada matematicamente rigorosa considerando a distribuição δ como o limite de funções regulares f_n interpretadas como distribuições. Sequências de distribuições regulares que convergem para a distribuição delta são por vezes chamadas de **sequências de Dirac**.

Teorema 9.14 *Seja f_n definida por $f_n(x) = nf(nx)$ onde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é integrável com*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Então $f_n \to \delta$ no sentido de convergência em $\mathscr{D}'$.

Demonstração. Para qualquer $\varphi \in \mathscr{D}$ temos

$$\begin{aligned}\langle f_n,\varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} nf(nx)\varphi(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi\Big(\frac{y}{n}\Big)dy = \varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Big[\varphi\Big(\frac{x}{n}\Big) - \varphi(0)\Big]dx.\end{aligned}$$

Levando em conta que φ é contínua,

$$\lim_{n\to\infty} f(x)\Big[\varphi\Big(\frac{x}{n}\Big) - \varphi(0)\Big] = f(x)\big[\varphi(0) - \varphi(0)\big] = 0.$$

Além disso,

$$\left| f(x)\left[\varphi(\frac{x}{n}) - \varphi(0)\right]\right| = |f(x)|\left|\varphi(\frac{x}{n}) - \varphi(0)\right| \leq 2M|f(x)|,$$

onde $M = \max|\varphi(x)|$. Como $|f|$ é integrável, o teorema da convergência dominada de Lebesgue (Apêndice A) conduz a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\varphi(\frac{x}{n}) - \varphi(0)\right]dx = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty} f(x)\left[\varphi(\frac{x}{n}) - \varphi(0)\right]dx = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n,\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} nf(nx)\varphi(x)dx = \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle$$

e a demonstração está concluída. ∎

Os exemplos mais simples de sequências de Dirac são

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2} \text{ correspondente a } f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} \tag{9.59}$$

e

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2} \text{ correspondente a } f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}. \tag{9.60}$$

Escrevendo $\epsilon = 1/n$ em (9.60), obtemos o resultado talvez mais familiar

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = \delta(x). \tag{9.61}$$

Embora para cada uma dessas sequências se tenha o limite pontual

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

a convergência $f_n \to \delta$ só é verdadeira como distribuições, não como funções, porque não existe uma verdadeira função delta. Além do mais, a convergência pontual é desnecessária para a convergência no sentido de distribuições (Lemos 2010). Alguns exemplos tornam isto evidente. Pode-se provar (Problema 9.4) que a sequência de distribuições

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen} nx}{x} \tag{9.62}$$

converge[3] para δ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen} nx}{x} = \delta(x)\,. \qquad 9.63$$

No entanto, para $x \neq 0$ as sequências numéricas $f_n(x)$ não convergem para zero: o limite não existe. Por outro lado, como

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx = 1\,,$$

segue-se do Teorema 9.14 que a sequência de distribuições

$$f_n(x) = \frac{2n^3x^2}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2} \qquad 9.64$$

converge em $\mathscr{D}'$ para a distribuição δ. Entretanto, esta sequência de funções converge pontualmente para a função identicamente nula!

Teorema 9.15

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \frac{x}{x^2+\epsilon^2} = \mathrm{P}\frac{1}{x}\,. \qquad 9.65$$

Demonstração. Seja $[-A,A]$ um intervalo contendo o suporte de $\varphi \in \mathscr{D}$, de modo que

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+\epsilon^2}\varphi(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-A}^{A} \frac{x}{x^2+\epsilon^2}\varphi(x)dx\,.$$

Podemos escrever isto na forma

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-A}^{A} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\epsilon^2}dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\varphi(0)\int_{-A}^{A}\frac{x}{x^2+\epsilon^2}dx + \int_{-A}^{A}\frac{x[\varphi(x)-\varphi(0)]}{x^2+\epsilon^2}dx\right].$$

A primeira integral no segundo membro desta equação é nula porque o integrando é uma função ímpar. Quanto ao segundo integrando, o teorema do valor médio conduz a

$$\left|\frac{x[\varphi(x)-\varphi(0)]}{x^2+\epsilon^2}\right| = \left|\frac{x^2\varphi'(\xi)}{x^2+\epsilon^2}\right| \leq \max_{x\in[-A,A]} |\varphi'(x)|\,.$$

3. Embora tenha-se $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x/x\, dx = \pi$, a equação (9.63) não decorre do Teorema 9.14 porque, conforme demonstrado na Seção A.6 do Apêndice A, a função $\operatorname{sen} x/x$ não é integrável no sentido de Lebesgue sobre toda a reta real: $\int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{sen} x/x|\, dx = \infty$.

Portanto, o segundo integrando é limitado e, consequentemente, integrável em $[-A,A]$. Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, o limite pode ser tomado sob o sinal de integral, de modo que

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\varphi(x)}{x^2+\epsilon^2}dx=\int_{-A}^{A}\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{x[\varphi(x)-\varphi(0)]}{x^2+\epsilon^2}dx=\int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx.$$

De acordo com o Exemplo 9.1.5,

$$\int_{-A}^{A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx=\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx,$$

o que estabelece (9.65). ∎

Exercício 9.5.1
Prove que

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{x\pm i\epsilon}=\mathrm{P}\frac{1}{x}\mp i\pi\delta(x) \qquad 9.66$$

no sentido de distribuições.

Este último resultado é utilizado na teoria do espalhamento da mecânica quântica (Goldberger & Watson 1975, p. 74) e na dedução das relações de dispersão de Kramers-Kronig na teoria eletromagnética (Jackson 1999, p. 333).

Séries Trigonométricas

O Corolário 9.13 assegura que uma série convergente de distribuições pode ser diferenciada termo a termo tantas vezes quanto se desejar. Esta propriedade propicia uma condição suficiente extremamente simples para a convergência de uma série trigonométrica de distribuições.

Teorema 9.16 *Para que uma série trigonométrica da forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{inx} \qquad 9.67$$

seja convergente em $\mathscr{D}'$ é suficiente que os coeficientes a_n sejam limitados superiormente por uma potência de n para n suficientemente grande, isto é, $|a_n|\le A|n|^{\alpha}$ para algum $\alpha\ge 0$.

Demonstração. Desconsiderando temporariamente o termo com $n = 0$, consideremos a série

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{a_n}{(in)^p} e^{inx}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad p \geq \alpha + 2. \tag{9.68}$$

Devido à escolha de p, o termo geral desta série é limitado em módulo por A/n^2. Pelo teste M de Weierstrass, a série (9.68) converge uniformemente para uma função contínua f. Como toda função contínua f determina uma distribuição T_f, a série de distribuições (9.68) converge para T_f. Diferenciando termo a termo p vezes a série (9.68), o que é permitido pelo Corolário 9.13, resulta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} = a_0 + T_f^{(p)}, \tag{9.69}$$

completando a demonstração. ∎

Exemplo 9.5.1
A função

$$x \mapsto \frac{(x-\pi)^2}{4} \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 2\pi \tag{9.70}$$

tem coeficientes de Fourier[4]

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} dx = \frac{\pi^2}{6},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} \cos nx \, dx = \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} \operatorname{sen} nx \, dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, conforme conhecidos teoremas de convergência para séries de Fourier (Figueiredo 2003, seção 3.7), a extensão periódica a toda a reta real — com período 2π — da função (9.70) é representada pela série de Fourier uniformemente convergente

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Diferenciando termo a termo resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{para} \quad 0 < x < 2\pi \tag{9.71}$$

e sua extensão periódica no sentido de distribuições. A extensão periódica da função $x \mapsto (\pi - x)/2$ tem um salto de valor π em $x = 2n\pi$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, sua derivada como distribuição é igual à sua derivada como função acrescida da soma de cada salto multiplicado pela distribuição delta localizada no ponto em que ocorre o salto — vide equação (9.14). Portanto, diferenciando (9.71) termo a termo resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2n\pi}$$

que podemos reescrever na forma

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2n\pi}. \tag{9.72}$$

Esta equação costuma ser expressa na forma simbólica equivalente

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi nx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n), \tag{9.73}$$

obtida com a troca da variável x por $2\pi x$ e o uso da propriedade $\delta(2\pi x - 2\pi n) = \dfrac{\delta(x-n)}{2\pi}$.

Este último resultado tem um aspecto notável: visto como uma série de funções, o primeiro membro de (9.73) é divergente, já que o termo geral da série não tende a zero, mas é convergente como uma série de distribuições. Este fenômeno parece uma homenagem póstuma não intencional ao físico, engenheiro elétrico e matemático inglês Oliver Heaviside (1850-1925), autor de contribuições importantes à teoria eletromagnética e à análise vetorial. O cálculo operacional utilizado por Heaviside — baseado na livre manipulação algébrica do operador diferencial $p = d/dt$ como se fosse um número — permitia resolver equações diferenciais com extrema eficiência, mas era mal visto por causa da falta de rigor do método. Heaviside não se preocupava com

a demonstração da validade das suas técnicas, que funcionavam a despeito das críticas dos puristas: "Não é porque eu não entendo direito como funciona a digestão que eu vou deixar de almoçar", dizia ele. A Royal Society, da qual Heaviside era membro, recusou-se a publicar alguns de seus audaciosos e inovadores trabalhos por falta de rigor matemático. A equação (9.73) parece a materialização da profética e sarcástica farpa disparada por Heaviside contra seus detratores (Bell 1972, p. 415): "This series is divergent; therefore we may be able to do something useful with it." Na década de 1920, tardiamente, deu-se o reconhecimento do gênio de Heaviside, do valor dos seus trabalhos e da legitimidade matemática dos seus métodos.

A teoria das distribuições é mais um exemplo de um fenômeno recorrente na história da Matemática: se um formalismo invariavelmente produz resultados corretos e úteis, deve haver uma justificação rigorosa subjacente.

9.6 *Transformada de Fourier e Distribuições Temperadas*

O estudo profundo da natureza é a fonte mais rica de descobertas matemáticas.

Joseph Fourier

A transformação de Fourier é uma ferramenta matemática de importância inestimável para a Física. A partir da definição da transformada de Fourier de uma função, discutiremos a extensão natural da transformada de Fourier a distribuições e veremos a necessidade de ampliar o espaço das funções de teste.

Definição e Propriedades da Transformação de Fourier

Seja $L^1(\mathbb{R})$, também denotado abreviadamente por L^1, o espaço das funções integráveis sobre toda a reta real, isto é,

$$f \in L^1 \iff \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty. \tag{9.74}$$

Dada uma função $f \in L^1$, sua **transformada de Fourier** é a função denotada por $\mathscr{F}f$ ou $\hat{f}$ e definida por

$$\mathscr{F}f(k) = \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\,dx. \tag{9.75}$$

Como $|e^{-ikx}f(x)| = |f(x)|$ e $|f|$ é integrável, segue-se que a integral existe para cada $k \in \mathbb{R}$ e a função $\mathscr{F}f$ está bem definida. Infelizmente, não há uma definição universalmente aceita para a transformada de Fourier: alguns autores a definem sem o pré-fator $1/\sqrt{2\pi}$ e há matemáticos que não apenas omitem este fator como também substituem k por $2\pi k$ na função exponencial. Ainda outras escolhas são encontradas na literatura. Portanto, confira a definição antes de comparar resultados de diferentes autores. A **transformada de Fourier conjugada**, denotada por $\overline{\mathscr{F}}f$ ou $\check{f}$, é definida por

$$\overline{\mathscr{F}}f(k) = \check{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx. \tag{9.76}$$

As funções $\mathscr{F}f$ e $\overline{\mathscr{F}}f$ são contínuas e limitadas:

$$\sqrt{2\pi}\,|\mathscr{F}f(k)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1, \tag{9.77}$$

com resultado análogo para $\overline{\mathscr{F}}f$. Além disso, tanto $\mathscr{F}f(k)$ quanto $\overline{\mathscr{F}}f(k)$ tendem a zero para $|k| \to \infty$ pelo lema de Riemann-Lebesgue (Problema 9.3).

Se f é diferenciável e $f' \in L^1$ podemos integrar por partes para obter

$$\int_{-A}^{A} e^{-ikx} f(x) dx = \frac{e^{-ikx}}{-ik} f(x)\Big|_{-A}^{A} + \frac{1}{ik} \int_{-A}^{A} e^{-ikx} f'(x) dx. \tag{9.78}$$

Passando ao limite $A \to \infty$, o termo integrado é nulo porque $f(x) \to 0$ para $|x| \to \infty$, de modo que

$$\mathscr{F}f(k) = \frac{1}{ik} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f'(x) dx. \tag{9.79}$$

Comentário. No raciocínio acima tomamos como óbvio que $f(x)$ se anula quando $x \to \pm\infty$, mas isto requer prova (o intuitivamente óbvio é frequentemente falso na Matemática). De

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

deduz-se que $f(x)$ tem certamente limites finitos para $x \to \pm\infty$ porque

$$f(\pm\infty) = f(0) + \int_0^{\pm\infty} f'(t) dt$$

e estas integrais existem porque $f' \in L^1$. Esses limites, no entanto, não podem ser diferentes de zero porque a integral de $|f|$ sobre $\mathbb{R}$ seria infinita, em contradição com a hipótese de que $f \in L^1$ (esta parte da demonstração é mais fácil e fica por sua conta).

A fórmula (9.79) pode ser escrita na forma

$$ik\mathscr{F}f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f'(x)dx = \mathscr{F}[f'](k), \tag{9.80}$$

que é válida para todo k (para $k = 0$ o primeiro membro é nulo e o segundo membro é proporcional a $\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)dx = f(\infty) - f(-\infty) = 0$). De (9.80) deduz-se

$$\sqrt{2\pi}\,|k|\,|\mathscr{F}f(k)| \leq \|f'\|_1 . \tag{9.81}$$

Procedendo indutivamente, se f é m vezes continuamente diferenciável e todas as derivadas até a ordem m pertencem a L^1, inferimos

$$(ik)^m \mathscr{F}f(k) = \mathscr{F}[f^{(m)}](k), \tag{9.82}$$

e

$$\sqrt{2\pi}\,|k|^m\,|\mathscr{F}f(k)| \leq \|f^{(m)}\|_1 . \tag{9.83}$$

Naturalmente, as mesmas fórmulas valem para $\overline{\mathscr{F}}f$ bastando substituir i por $-i$.

Examinemos a diferenciabilidade de $\mathscr{F}f$. Derivando formalmente sob o sinal de integral resulta

$$\sqrt{2\pi}\,(\mathscr{F}f)'(k) = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)e^{-ikx} f(x)dx. \tag{9.84}$$

A derivação sob o sinal de integral é legítima se $xf(x)$ pertence a L^1.

Exercício 9.6.1

A Eq.(9.84) decorre do Teorema 7.15, mas uma prova específica é instrutiva. Partindo da definição de derivada

$$(\mathscr{F}f)'(k) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathscr{F}f(k+h) - \mathscr{F}f(k)}{h},$$

supondo que $xf(x) \in L^1$ e usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, prove que (9.84) é válida. Você precisará da estimativa

$$\left|\frac{e^{-ixh}-1}{h}\right| \leq |x| \text{ para todo } h \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

que pode ser estabelecida a partir de $(e^{-ixh}-1)/h = -i\int_0^x e^{-ith}dt$.

Podemos reescrever (9.84) na forma

$$(\mathscr{F}f)'(k) = \mathscr{F}[-ixf(x)]. \qquad 9.85$$

Mais geralmente, se $f(x), xf(x), \ldots, x^m f(x) \in L^1$, então $\mathscr{F}f$ é m vezes diferenciável, a diferenciação sob o sinal de integral é permitida pelo Teorema 7.15 e temos

$$(\mathscr{F}f)^{(m)}(k) = \mathscr{F}[(-ix)^m f(x)] \qquad 9.86$$

com a limitação

$$|(\mathscr{F}f)^{(m)}(k)| \leq \|x^m f(x)\|_1. \qquad 9.87$$

As equações (9.83) e (9.87) podem ser assim resumidas: quanto mais vezes f é diferenciável (com derivadas integráveis), mais rapidamente $\mathscr{F}f$ decresce no infinito; quanto mais decrescente é f no infinito, mais diferenciável é $\mathscr{F}f$ (com derivadas limitadas). Obviamente, as fórmulas (9.83) e (9.87) permanecem válidas com a substituição de $\mathscr{F}f$ por $\overline{\mathscr{F}}f$. Esses resultados podem ser consolidados num teorema.

Teorema 9.17 *Toda função $f \in L^1$ possui uma transformada de Fourier $\mathscr{F}f(k)$, dada por (9.75), que é contínua, limitada e tende a zero para $|k| \to \infty$. Se f é m vezes continuamente diferenciável e suas derivadas até a ordem m são integráveis, então as equações (9.82) e (9.83) são válidas. Se $f, xf, \ldots, x^m f$ são integráveis, então $\mathscr{F}f$ é m vezes continuamente diferenciável e valem as equações (9.86) e (9.87).*

ESPAÇO DAS FUNÇÕES DE DECRÉSCIMO RÁPIDO

Se $f \in L^1$, a distribuição associada a $\mathscr{F}f$ é

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{F}f,\varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dk\varphi(k)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\varphi(k)dk = \langle f,\mathscr{F}\varphi\rangle,\end{aligned} \tag{9.88}$$

onde a legitimidade da troca da ordem de integração decorre do teorema de Fubini, porque a integral iterada em $\mathbb{R}^2$ de

$$|e^{-ikx}f(x)\varphi(k)| = |f(x)|\,|\varphi(k)|$$

é finita, pois trata-se do produto de uma função integrável em x por uma função integrável em k.

A Eq. (9.88) nos compele a definir, para uma distribuição arbitrária T, a sua transformada de Fourier $\mathscr{F}T$ por

$$\langle \mathscr{F}T,\varphi\rangle = \langle T,\mathscr{F}\varphi\rangle\,,\quad \varphi\in\mathscr{D}\,. \tag{9.89}$$

Lamentavelmente, esta fórmula não faz sentido para T arbitrária: se $\varphi\in\mathscr{D}$ não há motivo algum para que a função $\mathscr{F}\varphi$ pertença a $\mathscr{D}$. Na verdade, $\mathscr{F}\varphi$ nunca pertence a $\mathscr{D}$ com exceção do caso trivial $\varphi\equiv 0$ (Schwartz 2008, p. 190). A inexistência da transformada de Fourier de distribuições arbitrárias exige considerar uma classe restrita de distribuições. A ampliação do espaço de funções de teste reduz automaticamente a classe correspondente de funcionais lineares contínuos.

Definição 9.18 *O espaço das* ***funções infinitamente diferenciáveis de decréscimo rápido****, denotado por $\mathscr{S}$, consiste nas funções $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis e tais que $\varphi(x)$ decresce mais rapidamente do que qualquer potência de $1/|x|$ para $|x|\to\infty$, o mesmo acontecendo com cada uma de suas derivadas. Mais precisamente, $\mathscr{S}$ é o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis tais que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^l\varphi^{(m)}(x)| < \infty \tag{9.90}$$

para todos os inteiros não negativos l e m.

Exemplo 9.6.1
A função $\varphi(x) = e^{-x^2}$ pertence a $\mathscr{S}$.

Decorre da Definição 9.18 que, se $\varphi \in \mathscr{S}$:

(i) Quaisquer que sejam os inteiros não negativos l e m, a função $x^l \varphi^{(m)}$ é limitada e integrável, pois do fato de $(1+x^2)x^l\varphi^{(m)}$ ser limitada por uma constante M, deduz-se que $x^l\varphi^{(m)}$ é limitada por $M/(1+x^2)$, que é integrável.

(ii) Quaisquer que sejam os inteiros não negativos l e m, a regra de Leibnitz da derivada de um produto nos permite inferir que função $(x^l\varphi(x))^{(m)}$ é limitada e integrável.

Assim como foi feito com o espaço $\mathscr{D}$, é necessário introduzir uma topologia ou noção de convergência em $\mathscr{S}$.

Definição 9.19 (Convergência em $\mathscr{S}$) *Uma sequência (φ_n) de funções de $\mathscr{S}$ converge para $\varphi \in \mathscr{S}$ se e somente se, quaisquer que sejam os inteiros não negativos l e m, a sequência $\left(x^l\varphi_n^{(m)}\right)$ converge uniformemente para $x^l\varphi^{(m)}$.*

O palco mais natural para se definir a transformação de Fourier é o espaço $\mathscr{S}$ em virtude da proposição a seguir.

Teorema 9.20 *Se $\varphi(x) \in (\mathscr{S})_x$ sua transformada de Fourier $\mathscr{F}\varphi(k)$ pertence a $(\mathscr{S})_k$. Além disso, se a sequência de funções (φ_n) converge para φ em $(\mathscr{S})_x$ então a sequência de transformadas de Fourier $\mathscr{F}\varphi_n(k)$ converge para $\mathscr{F}\varphi(k)$ em $(\mathscr{S})_k$.*

Demonstração. Se $\varphi(x) \in (\mathscr{S})_x$ acabamos de ver que $x^l\varphi(x)$ é integrável para qualquer inteiro não negativo l. Combinando (9.82) com (9.86) resulta

$$(ik)^m(\mathscr{F}\varphi)^{(l)}(k) = \mathscr{F}\left[\left((-ix)^l\varphi(x)\right)^{(m)}\right], \tag{9.91}$$

donde

$$\sqrt{2\pi}\,|k|^m\,|(\mathscr{F}\varphi)^{(l)}(k)| \le \left\|\left(x^l\varphi(x)\right)^{(m)}\right\|_1. \tag{9.92}$$

Isto prova que $\mathscr{F}\varphi(k)$ e todas as suas derivadas tendem a zero mais rapidamente do que qualquer potência de $1/|k|$, de modo que $\mathscr{F}\varphi(k) \in (\mathscr{S})_k$. Para a segunda parte da demonstração basta considerar sequências que convergem para 0, pois a este se reduz o caso geral em que $\varphi_n \to \varphi$ simplesmente tomando a sequência (χ_n) com $\chi_n = \varphi_n - \varphi$. Se $\varphi_n \to 0$ em $(\mathscr{S})_x$ segue-se que $(1+x^2)\left(x^l\varphi_n(x)\right)^{(m)}$ também converge uniformemente para zero em $(\mathscr{S})_x$, de modo que $\left|\left(x^l\varphi_n(x)\right)^{(m)}\right| \le M/(1+x^2)$ para todo x e para todo n

(pelo Problema 7.4, uma sequência uniformemente convergente de funções limitadas é uniformemente limitada). O teorema da convergência dominada de Lebesgue garante que o segundo membro de (9.92), com φ_n no lugar de φ, converge para zero quando $n \to \infty$. Portanto, $k^m(\mathscr{F}\varphi_n)^{(l)}(k)$ converge uniformemente para zero quando $n \to \infty$ quaisquer que sejam os inteiros não negativos l e m. Isto significa que a sequência de transformadas de Fourier $\mathscr{F}\varphi_n(k)$ converge para zero em $(\mathscr{S})_k$. ∎

Em suma, a transformação de Fourier mapeia o espaço $\mathscr{S}$ em si próprio.

Exemplo 9.6.2

Como vimos no Exemplo 7.6.3, a função $e^{-x^2/2}$ é igual à sua transformada de Fourier:

$$\mathscr{F}(e^{-x^2/2}) = e^{-k^2/2}. \tag{9.93}$$

Prova-se facilmente que, para $a \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$,

$$\mathscr{F}[\varphi(ax)] = \frac{1}{|a|}(\mathscr{F}\varphi)\Big(\frac{k}{a}\Big). \tag{9.94}$$

Aplicando este resultado deduz-se imediatamente

$$\mathscr{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\, e^{-k^2/4a} \tag{9.95}$$

para $a > 0$.

Distribuições Temperadas

Por maior que seja o seu ritmo de crescimento no infinito, uma função localmente integrável define uma distribuição porque as funções de $\mathscr{D}$ têm suporte compacto. Há uma classe importante de distribuições que generalizam funções que não crescem desmesuradamente no infinito.

Definição 9.21 *Uma **distribuição temperada** é um funcional linear contínuo sobre $\mathscr{S}$. Como $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$, se $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathscr{D}$ então $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathscr{S}$, de modo que uma distribuição temperada é um funcional linear contínuo em $\mathscr{D}$ que é prolongável a um funcional linear contínuo em $\mathscr{S}$.*

Exemplo 9.6.3

Uma função f integrável sobre toda a reta real é uma distribuição temperada. Com efeito,

$$\langle f,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \tag{9.96}$$

existe se φ é limitada, e isto é verdadeiro sempre que $\varphi \in \mathscr{S}$. Quanto à continuidade, precisamos apenas provar que $\langle f,\varphi_n\rangle \to 0$ se $\varphi_n \to 0$ em $\mathscr{S}$. Como $\varphi_n \to 0$ uniformemente, segue-se que (φ_n) é uniformemente limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|\varphi_n(x)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. Decorre de $|f(x)\varphi_n(x)| \leq M|f(x)|$ que $f\varphi_n$ é uma sequência dominada pela função integrável $M|f|$. Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\langle f,\varphi_n\rangle &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_n(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0dx = 0.\end{aligned}$$

Exemplo 9.6.4

Uma função f limitada define uma distribuição temperada, pois $f(x)\varphi(x)$ é integrável em virtude da integrabilidade de $\varphi \in \mathscr{S}$. Mais geralmente, toda função f localmente integrável e de crescimento lento define uma distribuição temperada, onde crescimento lento significa que existem $k > 0$ e $A > 0$ tais que

$$|f(x)| \leq A|x|^k \text{ para } |x| \to \infty. \tag{9.97}$$

Tomando $L > 0$ e escrevendo $\langle f,\varphi\rangle$ como soma de uma integral sobre o intervalo $[-L,L]$ com outra integral sobre a região $|x| \geq L$, a primeira integral é obviamente finita e a segunda é também finita pelo seguinte argumento: $\varphi \in \mathscr{S}$ verifica

$$|\varphi(x)| \leq \frac{B}{|x|^{k+2}} \text{ para } |x| \to \infty,$$

donde

$$|f(x)\varphi(x)| \leq \frac{AB}{|x|^2} \text{ para } |x| \to \infty$$

e $AB/|x|^2$ é integrável tanto em $[L, \infty)$ quanto em $(-\infty, -L]$. Novamente, a continuidade decorre imediatamente do teorema da convergência dominada.

A palavra "temperada" não tem nenhuma conotação culinária, mas evoca o crescimento moderado no infinito. Pode-se provar, por exemplo, que e^x não é uma distribuição temperada (Schwartz 1966, p. 239) — a função exponencial cresce imoderadamente. O espaço das distribuições temperadas, dual de $\mathscr{S}$, é denotado por $\mathscr{S}'$. As distribuições temperadas são muito importantes na formulação axiomática da teoria quântica de campos (Streater & Wightman 1964; Jost 1965).

TRANSFORMADA DE FOURIER DE DISTRIBUIÇÕES TEMPERADAS

Se T é uma distribuição temperada, todas as suas derivadas são distribuições temperadas, porque se $\varphi \in \mathscr{S}$ todas as suas derivadas pertencem a $\mathscr{S}$. Se T é uma distribuição temperada e $\alpha(x)$ é um polinômio em x, αT é uma distribuição temperada porque $\alpha\varphi \in \mathscr{S}$ sempre que $\varphi \in \mathscr{S}$.

Definição 9.22 *Se T é uma distribuição temperada, $\mathscr{F}T$ e $\overline{\mathscr{F}}T$ são distribuições temperadas definidas pelas fórmulas*

$$\langle \mathscr{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathscr{F}\varphi \rangle \tag{9.98}$$

e

$$\langle \overline{\mathscr{F}}T, \varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathscr{F}}\varphi \rangle \tag{9.99}$$

para toda função $\varphi \in \mathscr{S}$.

Esta definição é adequada porque, se $\varphi \in \mathscr{S}$, então $\mathscr{F}\varphi$ e $\overline{\mathscr{F}}\varphi$ pertencem a $\mathscr{S}$. Se $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathscr{S}$ suas transformadas de Fourier $\mathscr{F}\varphi_n$ e $\overline{\mathscr{F}}\varphi_n$ convergem, respectivamente, para $\mathscr{F}\varphi$ e $\overline{\mathscr{F}}\varphi$, de acordo com o Teorema 9.20. Logo, $\mathscr{F}T$ e $\overline{\mathscr{F}}T$ são funcionais lineares contínuos em $\mathscr{S}$.

Exemplo 9.6.5
Transformada de Fourier da distribuição δ:

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{F}\delta,\varphi\rangle &= \langle \delta,\mathscr{F}\varphi\rangle \\ &= \mathscr{F}\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\varphi\right\rangle.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathscr{F}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Definição 9.23 *Se T é uma distribuição arbitrária, sua* ***translata*** *por $a \in \mathbb{R}$ é a distribuição T_a definida por*

$$\langle T_a,\varphi\rangle = \langle T,\varphi_{-a}\rangle \ \textit{para todo} \ \varphi \in \mathscr{D} \tag{9.100}$$

onde

$$\varphi_a(x) = \varphi(x-a). \tag{9.101}$$

Exercício 9.6.2
Justifique esta última definição. Prove que

$$\mathscr{F}\left(e^{-iax}\varphi(x)\right) = \left(\mathscr{F}\varphi\right)_{-a} \ \text{ e } \ e^{-iax}\left(\mathscr{F}\varphi\right)(x) = \left[\mathscr{F}(\varphi_a)\right](x). \tag{9.102}$$

Não se deixe confundir pelas letras: a expressão $e^{-iax}(\mathscr{F}\varphi)(x)$ representa exatamente a mesma função que $e^{-iak}(\mathscr{F}\varphi)(k)$, e que se costuma abreviar por $e^{-iax}(\mathscr{F}\varphi)$.

Teorema 9.24 *Se T é uma distribuição temperada:*

$$\mathscr{F}\left(\frac{d^pT}{dx^p}\right) = (ix)^p\,\mathscr{F}T; \quad \mathscr{F}\left[(-ix)^pT\right] = \frac{d^p}{dx^p}(\mathscr{F}T); \tag{9.103}$$

$$\mathscr{F}T_a = e^{-iax}\mathscr{F}T; \quad \mathscr{F}\left(e^{iax}T\right) = \left(\mathscr{F}T\right)_a. \tag{9.104}$$

Fórmulas correspondentes valem para $\overline{\mathscr{F}}$ com a substituição de i por $-i$.

Demonstração. Para todo $\varphi \in \mathcal{S}$ temos

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{F}\frac{d^pT}{dx^p},\varphi\right\rangle &= \left\langle \frac{d^pT}{dx^p},\mathcal{F}\varphi\right\rangle \\ &= (-1)^p\left\langle T,\frac{d^p}{dx^p}(\mathcal{F}\varphi)\right\rangle = (-1)^p\langle T,\mathcal{F}\left[(-ix)^p\varphi(x)\right]\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}T,(ix)^p\varphi(x)\rangle = \langle (ix)^p\mathcal{F}T,\varphi\rangle .\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\left[(-ix)^pT\right],\varphi\rangle &= \langle (-ix)^pT,\mathcal{F}\varphi\rangle \\ &= \langle T,(-ix)^p\mathcal{F}\varphi\rangle = (-1)^p\langle T,\mathcal{F}\left[\varphi^{(p)}(x)\right]\rangle \\ &= (-1)^p\langle \mathcal{F}T,\varphi^{(p)}(x)\rangle = (-1)^p\left\langle \mathcal{F}T,\frac{d^p\varphi}{dx^p}\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d^p}{dx^p}(\mathcal{F}T),\varphi\right\rangle .\end{aligned}$$

Continuando,

$$\begin{aligned}\langle e^{-iax}\mathcal{F}T,\varphi\rangle &= \langle \mathcal{F}T,e^{-iax}\varphi\rangle \\ &= \langle T,\mathcal{F}\left[e^{-iax}\varphi(x)\right]\rangle = \langle T,\left(\mathcal{F}\varphi\right)_{-a}\rangle = \langle T_a,\mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T_a,\varphi\rangle .\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\left[e^{iax}T\right],\varphi\rangle &= \langle e^{iax}T,\mathcal{F}\varphi\rangle \\ &= \langle T,e^{iax}\mathcal{F}\varphi\rangle = \langle T,\mathcal{F}\left(\varphi_{-a}\right)\rangle = \langle \mathcal{F}T,\varphi_{-a}\rangle = \langle \left(\mathcal{F}T\right)_a,\varphi\rangle ,\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ∎

Agora estamos prontos para deduzir o teorema central da teoria da transformação de Fourier: as fórmulas de inversão de Fourier. Para tanto, necessitamos de um resultado auxiliar.

Lema 9.25 (Lema Fundamental)

$$\mathcal{F}\left(e^{iax}\right) = \sqrt{2\pi}\,\delta_a . \qquad \textbf{9.105}$$

Demonstração. Em virtude de (9.104), basta provar que

$$\mathcal{F}1 = \sqrt{2\pi}\,\delta . \qquad \textbf{9.106}$$

Note que a função $f(x) \equiv 1$ é limitada e, como já vimos, define uma distribuição temperada. Pelo Teorema 9.24,

$$0 = \mathscr{F}\left(\frac{d}{dx}1\right) = ix\mathscr{F}1,$$

de modo que, pelo Teorema 9.9,

$$\mathscr{F}1 = C\delta.$$

Para determinar o valor da constante C, tomemos $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$, de modo que

$$\langle \mathscr{F}1, \varphi\rangle = \langle 1, \mathscr{F}\varphi\rangle = \langle 1, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi},$$

ao passo que

$$\langle C\delta, \varphi\rangle = C\varphi(0) = C.$$

Portanto, $C = \sqrt{2\pi}$ e o lema está demonstrado. ∎

Analogamente, prova-se que

$$\overline{\mathscr{F}}1 = \sqrt{2\pi}\,\delta \tag{9.107}$$

e

$$\overline{\mathscr{F}}\left(e^{-iax}\right) = \sqrt{2\pi}\,\delta_a. \tag{9.108}$$

Teorema 9.26 (Teorema Fundamental) *Se $\varphi \in \mathscr{S}$ valem as* ***fórmulas de inversão de Fourier***

$$\mathscr{F}\left(\overline{\mathscr{F}}\varphi\right) = \varphi \ \text{ e } \ \overline{\mathscr{F}}\left(\mathscr{F}\varphi\right) = \varphi. \tag{9.109}$$

Equivalentemente, pode-se escrever

$$\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}} = I \ \text{ e } \ \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F} = I, \tag{9.110}$$

onde I denota a aplicação identidade em $\mathscr{S}$.

Demonstração. Pelo Lema Fundamental, temos

$$\begin{aligned}\varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle \mathscr{F}e^{iax}, \varphi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle e^{iax}, \mathscr{F}\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}\left(\mathscr{F}\varphi\right)(x)\,dx.\end{aligned}$$

Como a é arbitrário,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk} (\mathscr{F}\varphi)(k) dk = (\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\varphi)(x).$$

Da mesma forma, usando (9.108) obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \overline{\mathscr{F}} e^{-iax}, \varphi \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle e^{-iax}, \overline{\mathscr{F}}\varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iax} (\overline{\mathscr{F}}\varphi)(x) dx,\end{aligned}$$

o que estabelece a igualdade $\varphi = \mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}}\varphi)$ e completa a demonstração. ∎

As equações (9.106) e (9.107) são as versões rigorosas das expressões formais

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk. \qquad 9.111$$

Usando estas expressões simbólicas pode-se deduzir *formalmente* a fórmula de inversão de Fourier:

$$\begin{aligned}[\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}\varphi)](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} (\mathscr{F}\varphi)(k) dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} \varphi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \varphi(y) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(y-x)} dk \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \delta(y-x) dy = \varphi(x).\end{aligned}$$

Note, no entanto, que a mudança na ordem de integração que foi efetuada é *ilegítima* porque

$$|e^{-ik(y-x)} \varphi(y)| = |\varphi(y)|$$

e $|\varphi|$ não é integrável sobre $\mathbb{R}^2$ (embora $|\varphi|$ seja integrável sobre $\mathbb{R}$):

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(y)| dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(y)| dy = \|\varphi\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx = \infty.$$

A propriedade a seguir da transformação de Fourier é de extrema importância, especialmente para a teoria de operadores em espaços de Hilbert (vide Capítulo 12).

Teorema 9.27 (Parseval-Plancherel) *Se f e g pertencem a $\mathscr{S}$ então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathscr{F} f(x)} \mathscr{F} g(x)\, dx. \tag{9.112}$$

Demonstração. Em virtude do Teorema Fundamental, temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \mathscr{F} f(k)\, dk\right\}} g(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \overline{\mathscr{F} f(k)}\, dk\right\} g(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Como $\mathscr{F} f$ é integrável em k e g é integrável em x, seu produto é integrável em k e x. Portanto, pelo teorema de Fubini, a ordem de integração pode ser invertida, dando como resultado

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \overline{\mathscr{F} f(k)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} g(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathscr{F} f(k)} \mathscr{F} g(k)\, dk,
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ∎

Há uma outra operação importante sobre um par de funções que apresenta um comportamento extremamente simples sob a transformação de Fourier.

Definição 9.28 *Dadas duas funções $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, sua **convolução** $f * g$ é a função definida por*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y)\, dy. \tag{9.113}$$

Teorema 9.29 *A convolução $f * g$ de duas funções $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ satisfaz a **desigualdade de Young***

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \tag{9.114}$$

Além disso, sua transformada de Fourier é dada por

$$\mathscr{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\, (\mathscr{F} f)(\mathscr{F} g). \tag{9.115}$$

Demonstração. Pelo teorema de Fubini, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f*g)(x)|\,dx \le \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)||g(y)|dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\,dx \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|dy = \|f\|_1 \|g\|_1 ,$$

o que prova, ao mesmo tempo, que $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ e que a desigualdade de Young é satisfeita. Segue-se que $f * g$ possui uma transformada de Fourier dada por

$$\mathscr{F}(f*g)t(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y)\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-y)} g(x-y)\,dx$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} f(y)\,dy\right) (\mathscr{F}g)(k) = \sqrt{2\pi}\,(\mathscr{F}f)(k)\,(\mathscr{F}g)(k),$$

onde foi usado novamente o teorema de Fubini. ∎

Paridade e Transformada de Fourier

O reflexo em relação à origem de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é a função $\tilde{f}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = f(-x). \qquad 9.116$$

O reflexo em relação à origem de uma distribuição T é a distribuição $\tilde{T}$ definida por

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle. \qquad 9.117$$

Se $\tilde{T} = T$ diz-se que T é uma distribuição par; se $\tilde{T} = -T$ diz-se que T é uma distribuição ímpar.

Exercício 9.6.3
Mostre que a distribuição δ é par, mas $\mathrm{P}\frac{1}{x}$ é ímpar.

Exercício 9.6.4
Prove que a transformação de Fourier preserva a paridade de uma distribuição temperada.

Vejamos como os resultados destes dois últimos exercícios podem ser explorados para determinar a transformada de Fourier da distribuição $\mathrm{P}\frac{1}{x}$. Pelo Teorema 9.24,

$$\frac{d}{dx}\left(\mathscr{F}\mathrm{P}\frac{1}{x}\right) = \mathscr{F}\left(-ix\mathrm{P}\frac{1}{x}\right) = -i\mathscr{F}1 = -i\sqrt{2\pi}\,\delta, \qquad 9.118$$

onde usamos (9.106) e $x\mathrm{P}\frac{1}{x} = 1$.

Exercício 9.6.5
Seja ε a função definida por

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad 9.119$$

Prove que

$$\varepsilon' = 2\delta \qquad 9.120$$

no sentido de distribuições.

Com o uso deste último resultado, a Eq. (9.118) toma a forma

$$\frac{d}{dx}\left(\mathscr{F}\mathrm{P}\frac{1}{x} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\varepsilon\right) = 0, \qquad 9.121$$

donde

$$\mathscr{F}\mathrm{P}\frac{1}{x} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\varepsilon = C. \qquad 9.122$$

Como C é par, ε é ímpar e a transformação de Fourier preserva a paridade, conclui-se que $C = 0$ e

$$\mathscr{F}\mathrm{P}\frac{1}{x} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\varepsilon. \qquad 9.123$$

Esta equação costuma ser escrita na forma simbólica

$$\varepsilon(k) = -\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x}dx = \frac{1}{\pi i}\,\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{x}dx. \qquad 9.124$$

Reciprocamente,

$$\mathrm{P}\frac{1}{x} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\overline{\mathscr{F}}\varepsilon \qquad 9.125$$

ou, simbolicamente,

$$\mathrm{P}\frac{1}{x} = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\varepsilon(k)dk = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\varepsilon(k)dk. \qquad 9.126$$

Esta fórmula é útil tanto na eletrodinâmica quântica quanto na eletrodinâmica clássica (Leite Lopes 1960, pp. 27-28).

9.7 *Transformada de Fourier em* $\mathbb{R}^n$

A análise de Fourier pode ser estendida, sem grandes complicações adicionais, a funções de várias variáveis e a distribuições temperadas sobre $\mathbb{R}^n$.

Seja $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções complexas definidas em $\mathbb{R}^n$ que possuem derivadas parciais de todas as ordens. Para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e o multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ definimos

$$\partial_\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n. \qquad 9.127$$

O espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é definido por

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (\partial_\beta f)(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \right\}. \qquad 9.128$$

A transformada de Fourier de $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é

$$\mathscr{F}f(k) \equiv \hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} f(x)\, d^n x, \qquad 9.129$$

onde $kx = k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n$.

Lema 9.30 *A transformada de Fourier mapeia* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *em* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. *Além disso, para* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *e para para cada multi-índice* α *temos*

$$(\partial_\alpha f)^\wedge(k) = (ik)^\alpha \hat{f}(k), \quad (x^\alpha f(x))^\wedge(k) = i^{|\alpha|}(\partial_\alpha \hat{f})(k). \qquad 9.130$$

Demonstração. A primeira fórmula decorre da aplicação repetida de

$$\begin{aligned}(\partial_{x_j} f)^\wedge(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\, d^n x = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} e^{-ikx} \right) f(x)\, d^n x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} i k_j\, e^{-ikx} f(x)\, d^n x = i k_j \hat{f}(k),\end{aligned}$$

obtida via integração por partes. A segunda fórmula resulta da aplicação reiterada de

$$\begin{aligned}(x_j f(x))\hat{}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} x_j e^{-ikx} f(x)\, d^n x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(i \frac{\partial}{\partial k_j} e^{-ikx}\right) f(x)\, d^n x = i \frac{\partial}{\partial k_j} \hat{f}(k),\end{aligned}$$

onde a diferenciação sob o sinal de integral é justificada pelo Teorema 7.15. A partir de $k^\alpha (\partial_\beta \hat{f})(k) = i^{-|\alpha|-|\beta|} (\partial_\alpha x^\beta f(x))\hat{}(k)$ deduz-se

$$|k^\alpha (\partial_\beta \hat{f})(k)| \leq ||\partial_\alpha x^\beta f(x)||_1 < \infty,$$

já que $\partial_\alpha x^\beta f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. ∎

Teorema 9.31 *A transformada de Fourier $\mathscr{F}: \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma bijeção e sua inversa é*

$$\mathscr{F}^{-1} f(x) \equiv \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikx} f(k)\, d^n k. \tag{9.131}$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e $\phi_\epsilon(x) = e^{-\epsilon^2 x^2/2}$. O teorema da convergência dominada permite escrever

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\hat{f}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikx} \hat{f}(k)\, d^n k = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(k)\, e^{ikx} \hat{f}(k)\, d^n k \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(k)\, e^{ikx} f(y)\, e^{-iky}\, d^n y\, d^n k\end{aligned}$$

Usando o teorema de Fubini deduzimos

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\hat{f}(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(k)\, e^{ik(x-y)}\, d^n k \right) f(y)\, d^n y \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\epsilon^n} \phi_{1/\epsilon}(y-x)\, f(y)\, d^n y,\end{aligned}$$

onde usamos a integral gaussiana $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon^2 x^2/2 + iax}\, dx = (\sqrt{2\pi}/\epsilon) e^{-a^2/2\epsilon^2}$, em conformidade com a Eq.(9.95). Com a mudança de variáveis $z = (y-x)/\epsilon$ resulta, finalmente,

$$\mathscr{F}^{-1}\hat{f}(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(z)\, f(x+\epsilon z)\, d^n z = f(x) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(z) = f(x)$$

pelo teorema da convergência dominada. ∎

Teorema 9.32 *Para $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ vale a* ***identidade de Parseval***

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}(k)}\, \hat{g}(k)\, d^n k = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\, g(x)\, d^n x. \tag{9.132}$$

Demonstração. Basta, como no caso unidimensional, aplicar o teorema de Fubini. ∎

Teorema 9.33 *A* ***convolução*** *$f * g$ de duas funções $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é definida por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\, d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, d^n y \tag{9.133}$$

e também pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $f * g$ satisfaz a ***desigualdade de Young***

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

e sua transformada de Fourier é dada por

$$(f * g)\hat{}(k) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(k)\, \hat{g}(k).$$

Demonstração. Aplicação direta do teorema de Fubini. ∎

A transformada de Fourier de uma distribuição temperada sobre $\mathbb{R}^n$ define-se exatamente como no caso unidimensional, e equações correspondentes a (9.103) e (9.104) deduzem-se do Lema 9.30.

Leituras Adicionais Selecionadas[5]

- • Schwartz, L. *Mathematics for the Physical Sciences.*
- Richards, J. I. e Youn, H. K. 1990 *Theory of Distributions.*

Problemas

9.1. Quais das aplicações $T : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ abaixo são distribuições?

(a) $T(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi^{(k)}(x_k) \quad (c_k, x_k \in \mathbb{R})$.

(b) $T(\varphi) = \varphi(0)^2 + \varphi'(0)^2$.

5. A lista completa de referências, com plenos detalhes bibliográficos, encontra-se na Bibliografia no fim do livro. O símbolo • destaca obras cuja leitura é altamente recomendada.

(c) $T(\varphi) = \varphi(0) + \varphi'(0)$.

(d) $T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, dx$.

(e) $T(\varphi) = \max_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x)$.

9.2. Encontre a solução geral da equação diferencial $xT' = 0$ para a distribuição T em $\mathbb{R}$.

9.3. Prove o lema de Riemann-Lebesgue: se I é um intervalo finito ou infinito e $f \in L^1(I)$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x) \cos\lambda x\, dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x) \operatorname{sen}\lambda x\, dx = 0.$$

Sugestões: (i) primeiro suponha que $I = [a,b]$ é um intervalo limitado, f é diferenciável com derivada contínua e faça uma integração por partes; (ii) use, agora, o fato de que o conjunto das funções continuamente diferenciáveis em $[a,b]$ é denso em $L^1(a,b)$, isto é, dados $f \in L^1(a,b)$ e $\epsilon > 0$, existe g continuamente diferenciável tal que $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx < \epsilon/2$; (iii) finalmente, se I é infinito, escolha o intervalo finito $[a,b]$ de tal maneira que $\int_I = \int_{I\setminus[a,b]} + \int_a^b$ com $|\int_{I\setminus[a,b]}| < \epsilon/2$ (justifique a possibilidade de tal escolha).

9.4. (a) Utilizando a decomposição $\varphi(x) = \varphi(0) + [\varphi(x) - \varphi(0)]$ e o lema de Riemann-Lebesgue (Problema 9.3), prove que a distribuição

$$\frac{\operatorname{sen}\lambda x}{x}$$

converge em $\mathscr{D}'$ para $\pi\delta$ quando $\lambda \to \infty$. (b) Prove que, para λ real, a aplicação

$$\varphi \in \mathscr{D} \mapsto \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\lambda x}{x} \varphi(x)\, dx$$

define uma distribuição, que se denota por

$$\mathrm{P}\frac{\cos\lambda x}{x}.$$

Prove que esta distribuição converge para zero quando $\lambda \to \infty$.

9.5. (a) Mostre que a aplicação que faz corresponder a cada $\varphi \in \mathscr{D}$ o número real

$$\langle \mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}, \varphi\rangle \equiv \mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon} \right\}$$

define uma distribuição denotada por $\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}$ (o símbolo "Pf" que antecede a integral significa "parte finita"). Sugestão: $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + [\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)]$. (b) Prove que

$$\langle \mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}, \varphi\rangle = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\, dx.$$

(c) Prove que

$$\left(\mathrm{P}\frac{1}{x}\right)' = -\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}.$$

(d) Prove que $x^2 \mathrm{Pf}\frac{1}{x^2} = 1$. (e) Calcule $\mathscr{F}\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}$.

9.6. (a) Prove que $x\delta' = -\delta$ e, mais geralmente, $x\delta^{(m)} = -m\delta^{(m-1)}$ para $m = 2, 3, \ldots$. (b) Prove que $x^m T = 0$ se e somente se $T = c_1\delta + c_2\delta' + \ldots + c_m\delta^{(m-1)}$, onde $c_1, \ldots, c_m$ são constantes arbitrárias.

9.7. Encontre a distribuição mais geral possível em $\mathbb{R}$ que satisfaz $x^2 T = 1$.

9.8. Encontre a solução geral da equação diferencial $xT' + T = 0$ para a distribuição T em $\mathbb{R}$.

9.9. Prove que, em duas dimensões,

$$\Delta \ln r = 2\pi\delta,$$

onde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

9.10. Prove que

$$\lim_{\lambda \to 0+} \lambda |x|^{\lambda - 1} = 2\delta.$$

9.11. Resolva a equação integral de Lalesco-Picard

$$\phi(x) = \cos ax + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\phi(y)\, dy, \quad \lambda \neq (1 + a^2)/2.$$

Sugestão: aplique a transformada de Fourier e não hesite em usar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ikx} dx = 2\pi\delta(k).$$

9.12. Justifique a seguinte definição de convolução da distribuição temperada T com $\varphi \in \mathscr{S}$:

$$\langle T * \varphi, \psi \rangle = \langle T, \psi * \tilde{\varphi} \rangle, \quad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

(b) Mostre que

$$\frac{d}{dx}(T * \varphi) = \frac{dT}{dx} * \varphi$$

e, em particular,

$$\frac{d}{dx}(\theta * \varphi) = \varphi,$$

onde θ é a função degrau de Heaviside. Justifique a diferenciação sob o sinal de integral.

9.13. Prove que

$$\frac{d}{dx}\theta(x^2 - 1) = \delta(x-1) - \delta(x+1) = 2x\delta(x^2 - 1).$$

9.14. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\delta(\operatorname{sen} \pi x)\, dx, \quad a > 0.$$

9.15. Seja θ a função degrau de Heaviside. Calcule, no sentido de distribuições:

(a) $\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)\theta(x)e^{\lambda x}$;

(b) $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)\frac{\theta(x)\operatorname{sen}\omega x}{\omega}$.

9.16. Calcule as derivadas de ordem 1 a 4 das distribuições

$$T_1 = |x|\cos x \quad \text{e} \quad T_2 = |x|\operatorname{sen} x.$$

9.17. O produto temporalmente ordenado ("time-ordered product", em inglês) desempenha um papel importante na teoria quântica dos campos e é definido, para duas funções f e g, por

$$T\big(f(t)g(\tau)\big) = \begin{cases} f(t)g(\tau) & \text{se } t > \tau \\ f(\tau)g(t) & \text{se } \tau > t \end{cases}.$$

Mostre que, para um certo valor da constante C, a distribuição

$$G_\tau(t) = C\,T\big(\operatorname{sen}\omega t \cos\omega\tau\big)$$

satisfaz

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) G_\tau(t) = \delta_\tau(t)\,,$$

isto é, $G_\tau(t)$ é uma função de Green do operador diferencial $d^2/dt^2 + \omega^2$.

9.18. Prove que, no sentido de convergência de distribuições,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \tanh nx}{2} = \theta(x)\,.$$

9.19. Encontre a distribuição T cuja transformada de Fourier é

$$\mathscr{F}T(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\delta'(k-n)\,.$$

9.20. Seja T a distribuição associada à função localmente integrável

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\[2ex] 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases}\,.$$

Como $T(x) = \dfrac{\theta(x)}{\sqrt{x}}$, um cálculo formal usando a regra de Leibnitz (9.49) conduz ao seguinte resultado sem sentido para a derivada de T:

$$T' = \frac{\delta(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{\theta(x)}{x^{3/2}} \quad \big(\textbf{Falso!}\big)\,.$$

Explique por que este cálculo é incorreto e mostre que T' é a distribuição dada por

$$\langle T', \varphi\rangle = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{3/2}}\,dx\,.$$

9.21. Em $\mathbb{R}^n$, com $n \ge 2$, considere a função $f(x) = 1/|x|$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$. Mostre que esta função define uma distribuição f dada por

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,d^n x\,.$$

9.22. Prove que, no sentido de convergência de distribuições,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos nx}{n\pi x^2} = \delta(x).$$

9.23. Seja

$$T = \mathrm{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{x+i\epsilon}.$$

Prove que

$$\mathscr{F}T = -i\sqrt{2\pi}\,\theta.$$

9.24. Encontre a solução geral da equação diferencial $(xT)'' = \delta$ para a distribuição T em $\mathbb{R}$.

9.25. Seja T uma distribuição em $\mathbb{R}$ e $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função infinitamente diferenciável tal que $\alpha(0) = 0$ e $\alpha'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que a solução geral de $\alpha T = 0$ é $T = C\delta$ para alguma constante C.

10

Espaços de Hilbert

Na mecânica quântica, uma partícula sem spin é descrita no instante t por uma função de onda $\Psi(\mathbf{x},t)$. A densidade de probabilidade da posição da partícula no instante t é $|\Psi(\mathbf{x},t)|^2$. Para que esta interpretação faça sentido, a densidade de probabilidade integrada sobre $\mathbb{R}^3$ deve ser igual a 1 em qualquer instante. Portanto, só são aceitáveis para representar o estado de uma partícula aquelas funções de onda Ψ tais que a integral de $|\Psi|^2$ sobre todo o espaço seja finita. Este conjunto de funções, denotado por $L^2(\mathbb{R}^3)$, constitui um exemplo de um espaço geral denominado *espaço de Hilbert*.

10.1 *Espaço de Hilbert*

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial (sinônimos: espaço linear, variedade linear) sobre o corpo dos números complexos. Tipicamente, os vetores de $\mathcal{V}$ serão denotadas por letras latinas tais como x, y, z, f, g, ao passo que letras gregas como α, β, λ designarão números complexos.

Definição 10.1 *Um* ***produto interno*** *ou* ***produto escalar*** *no espaço vetorial $\mathcal{V}$ é uma função complexa $\langle \cdot,\cdot \rangle$ definida sobre o produto cartesiano $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ tal que, quaisquer que sejam $x,y,z \in \mathcal{V}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$:*
(PI1) $\langle x, x\rangle \geq 0$ e $\langle x, x\rangle = 0$ *se e somente se* $x = 0$;
(PI2) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;
(PI3) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;
(PI4) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

Denotamos por $\overline{\lambda}$ o complexo conjugado de λ. Combinando (PI3) e (PI4) encontra-se imediatamente $\langle \alpha x, y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$. Dizemos que o produto

interno é linear no segundo elemento e antilinear no primeiro. Nos textos de Matemática costuma-se substituir (PI3) por $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, o que torna o produto interno linear no primeiro elemento e antilinear no segundo.

A partir das propriedades (PI2)-(PI4) verifica-se imediatamente que:

$$\begin{aligned} &\langle 0, x\rangle = \langle x, 0\rangle = 0; \ \ \langle x, \alpha y + \beta z\rangle \\ &= \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, z\rangle; \ \ \langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, z\rangle + \overline{\beta}\langle y, z\rangle . \end{aligned} \tag{10.1}$$

Teorema 10.2 (Desigualdade de Schwarz) *Se x e y são elementos de um espaço vetorial com produto interno,*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle . \tag{10.2}$$

Verifica-se a igualdade se e somente se x e y são ***paralelos****, isto é, se e somente se $x = \lambda y$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Se $y = 0$ não há nada a demonstrar. Se $y \neq 0$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$ temos

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - \lambda\langle x, y\rangle - \overline{\lambda}\langle y, x\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle .$$

A escolha $\lambda = \overline{\langle x, y\rangle}/\langle y, y\rangle$ reduz esta última desigualdade a

$$\langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} \geq 0 ,$$

que coincide com (10.2). Vale a igualdade se e somente se $x - \lambda y = 0$. ∎

Definição 10.3 *Um* ***espaço euclidiano*** *$\mathscr{E}$ é um espaço vetorial no qual está definido um produto interno.*

Definição 10.4 *Num espaço euclidiano, dois vetores x e y são* ***ortogonais*** *ou* ***perpendiculares*** *se $\langle x, y\rangle = 0$. Neste caso, escrevemos $x \perp y$.*

Exemplo 10.1.1

Considere o espaço vetorial $\mathbb{C}^n$. Se $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $y = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ são vetores de $\mathbb{C}^n$,

$$\langle x, y\rangle = \overline{\alpha}_1\beta_1 + \cdots + \overline{\alpha}_n\beta_n \tag{10.3}$$

é um produto interno em $\mathbb{C}^n$.

Exemplo 10.1.2
Um exemplo de espaço euclidiano de dimensão infinita é $L^2_{cont}(\mathbb{R})$, o espaço vetorial das funções complexas contínuas sobre $\mathbb{R}$ de quadrado integrável, isto é, tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

equipado com o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx. \qquad 10.4$$

Precisamos nos certificar de que esta definição faz sentido. De $(|f| - |g|)^2 \geq 0$ deduz-se imediatamente $2|f||g| \leq |f|^2 + |g|^2$, donde

$$|\overline{f(x)} g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{2}\{|f(x)|^2 + |g(x)|^2\},$$

de modo que $\overline{f} g$ é integrável sobre $\mathbb{R}$. É fácil comprovar que a expressão (10.4) tem todas as propriedades de um produto interno. Este mesmo argumento mostra que (10.4) define um produto interno em $L^2(\mathbb{R})$, com a habitual identificação de funções que só diferem num conjunto de medida zero a fim de assegurar a validade de (PI1).

A desigualdade de Schwarz com o produto interno (10.3) toma a forma de uma desigualdade para números complexos:

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_k \beta_k\Big|^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^2\Big). \qquad 10.5$$

No caso do produto interno (10.4) resulta uma desigualdade para integrais:

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx\Big|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx. \qquad 10.6$$

Teorema 10.5 *Num espaço vetorial V com produto interno,*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad 10.7$$

define uma norma em V.

Demonstração. Das propriedades (N1)-(N3) que caracterizam uma norma (ver Definição 8.53), a única cuja validade não é imediata é (N3), a desigualdade triangular. Temos

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 .$$

Mas

$$\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} = 2\,\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle \le 2|\langle x,y\rangle|$$

e, usando a desigualdade de Schwarz,

$$\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \le 2\sqrt{\langle x,x\rangle\,\langle y,y\rangle} = 2\,\|x\|\,\|y\| .$$

Por conseguinte, temos

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$$

que, por extração da raiz quadrada, implica a desigualdade triangular. ∎

Se x e y são vetores perpendiculares, o primeiro cálculo realizado na demonstração acima mostra que vale o **teorema de Pitágoras**:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{se} \quad x \perp y . \tag{10.8}$$

Duas identidades importantes envolvendo a norma são a **lei do paralelogramo**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{10.9}$$

e a **identidade de polarização**

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x-iy\|^2 - i\|x+iy\|^2\right) . \tag{10.10}$$

Um teorema de Jordan e von Neumann estabelece que uma norma deriva de um produto interno se e somente se obedece à lei do paralelogramo (Teschl 2009, p. 17).

Exercício 10.1.1
Demonstre a lei do paralelogramo e a identidade de polarização.

Recordemos que um espaço normado é um espaço vetorial munido de uma norma. De acordo com o Teorema 10.5, todo espaço vetorial dotado de um produto interno é um espaço normado com a norma induzida pelo produto interno. Lembremos, ainda, que um espaço normado é completo se toda sequência de Cauchy é convergente (reveja a Seção 8.8).

Definição 10.6 *Um **espaço de Hilbert** é um espaço euclidiano completo relativamente à norma induzida pelo produto interno.*

Mais detalhadamente, um espaço de Hilbert é um par ordenado $(\mathscr{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — um espaço vetorial $\mathscr{H}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — tal que toda sequência de Cauchy em $\mathscr{H}$ converge para um elemento de $\mathscr{H}$ segundo a norma induzida pelo produto interno. Portanto, cada espaço de Hilbert é um espaço de Banach especial cuja norma deriva de um produto interno.

Exemplo 10.1.3

O espaço l^2 das sequências de números complexos $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ com

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$$

é um espaço vetorial com o produto interno

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\xi}_n \eta_n$$

onde $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots)$. No caso $p = 2$, a norma definida em l^p no Exemplo 8.8.4 deriva deste produto interno. Pelo Teorema 8.48, l^p é completo para $p \geq 1$. Consequentemente, l^2 é um espaço de Hilbert.

Exemplo 10.1.4

O espaço euclidiano $L^2_{cont}(\mathbb{R})$ do Exemplo 10.1.2 não é um espaço de Hilbert porque não é completo. Por exemplo, para $a > 0$ a sequência de funções contínuas

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq a \\ e^{-n^2(|x|-a)^2} & \text{se } |x| > a \end{cases}$$

é uma sequência de Cauchy (verifique) em $L^2_{cont}(\mathbb{R})$ que não converge para um elemento de $L^2_{cont}(\mathbb{R})$. Esta sequência converge pontualmente para a função característica do intervalo $I = [-a, a]$

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq a \\ 0 & \text{se } |x| > a \end{cases}$$

que não pertence a $L^2_{cont}(\mathbb{R})$ porque é descontínua. Argumento idêntico ao usado na demonstração do Teorema 8.51 prova que (f_n) não pode convergir na norma derivada do produto interno (10.4) para nenhuma função contínua de quadrado integrável.

Exemplo 10.1.5
Todo espaço euclidiano pode ser completado e tornado um espaço de Hilbert pelo procedimento descrito na Seção 8.7. Por este motivo, um espaço euclidiano é também chamado de **espaço pré-hilbertiano**. O completamento de $L^2_{cont}(\mathbb{R})$ é o espaço $L^2(\mathbb{R})$ das funções de quadrado integrável segundo a noção de integral introduzida por Lebesgue. Duas funções de $L^2(\mathbb{R})$ são identificadas se só diferem num conjunto de medida nula. O teorema de Riesz-Fischer (Apêndice A) assegura que toda sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R})$ converge para um elemento de $L^2(\mathbb{R})$, isto é, $L^2(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert. Este resultado se estende a $L^2(\mathbb{R}^n)$ e a $L^2(\Omega)$, onde Ω é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$.

Recordemos algumas noções importantes introduzidas na Seção 8.5. Um subconjunto D de um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ é denso se $\overline{D} = \mathscr{H}$, onde $\overline{D}$ denota o fecho de D. Segue-se que D é denso em $\mathscr{H}$ se, dado $\epsilon > 0$, para qualquer $x \in \mathscr{H}$ existe $y \in D$ tal que $\|x - y\| < \epsilon$. Dito de outro modo: um subconjunto D de $\mathscr{H}$ é denso se possui elementos arbitrariamente próximos de qualquer elemento de $\mathscr{H}$. Uma propriedade importante dos conjuntos densos é a seguinte (Teorema 8.35): se D é denso em $\mathscr{H}$, para todo $x \in \mathscr{H}$ existe uma sequência (x_n) de elementos de D tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Os conjuntos densos são de extrema importância para toda a teoria de operadores lineares em espaços de Hilbert.

Definição 10.7 *Um espaço de Hilbert é* ***separável*** *se possui um subconjunto enumerável denso.*

Teorema 10.8 *O espaço de Hilbert l^2 é separável.*

Demonstração. Seja D o conjunto das sequências de l^2 da forma $(r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, 0, \ldots)$, onde os r_k são números complexos com partes real e imaginária racionais e todos os elementos da sequência são nulos a partir de um certo número natural n. Esta coleção de sequências é enumerável, pois é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis. Seja $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ um elemento qualquer de l^2. Dado $\epsilon > 0$ podemos escolher n tão grande que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Como números reais podem ser arbitrariamente aproximados por números racionais, existe um elemento $\tilde{x} = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, 0, \ldots) \in D$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} |r_k - \xi_k|^2 < \frac{\epsilon^2}{2}$$

Consequentemente,

$$\|\tilde{x} - x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{x}_k - \xi_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |r_k - \xi_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} = \epsilon^2$$

e temos $\|\tilde{x} - x\| < \epsilon$, o que completa a demonstração. ∎

Exemplo 10.1.6
Pode-se provar que $L^2(\Omega)$ é separável (Prugovečki 1981, pp. 109-115), onde $\Omega = \mathbb{R}^n$ ou Ω é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$.

Todos os espaços de Hilbert da mecânica quântica e da teoria quântica de campos são separáveis. Salvo menção em contrário, de ora em diante $\mathscr{H}$ denotará um espaço de Hilbert separável.

CONVERGÊNCIA FRACA

Dizer que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ em $\mathscr{H}$ é equivalente a afirmar que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Esta noção de convergência em $\mathscr{H}$ é às vezes chamada de **conver-**

gência forte para distingui-la de um outro tipo de convergência chamado de **convergência fraca**, e que é útil em certos contextos. Quando necessário, usaremos o símbolo s-lim para indicar que o limite é entendido no sentido de convergência forte.

Definição 10.9 *A sequência* (x_n) *de elementos de um espaço de Hilbert* $\mathscr{H}$ ***converge fracamente*** *para* $x \in \mathscr{H}$ *se*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \textit{para todo} \quad y \in \mathscr{H}\,. \tag{10.11}$$

Neste caso, escrevemos $x_n \xrightarrow{w} x$, $x_n \rightharpoonup x$ *ou* $\text{w-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Teorema 10.10 *Convergência forte implica convergência fraca.*
Demonstração. Se $x_n \to x$ fortemente,

$$|\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n - x\|\,\|y\| \to 0 \quad \text{para} \quad n \to \infty,$$

onde usamos a desigualdade de Schwarz. A validade deste resultado para qualquer $y \in \mathscr{H}$ prova o teorema. ▮

Exemplo 10.1.7
A recíproca do Teorema 10.10 é falsa. Seja $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l^2$ com

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 = 1$$

e considere a sequência (x_n) com

$$x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n\,\text{zeros}}, \xi_1, \xi_2, \ldots) \implies \|x_n\|^2 = 1\,.$$

Dado $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots) \in l^2$ temos

$$|\langle x_n, y\rangle|^2 = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\xi}_k \eta_{n+k}\right|^2 \leq \|x_n\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_{n+k}|^2$$
$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} |\eta_k|^2 \to 0 \quad \text{para} \quad n \to \infty.$$

Logo, $x_n \xrightarrow{w} 0$ mas x_n não converge fortemente para o vetor nulo porque $\|x_n\| = 1$ para todo n.

O Teorema 10.10 equivale a escrever, se $x_n \to x$ fortemente,

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle, \tag{10.12}$$

isto é, o produto interno é uma função contínua de seus argumentos.

10.2 *Bases Ortonormais*

A existência de um produto interno permite introduzir em qualquer espaço euclidiano o importantíssimo conceito de sistema ortonormal de vetores.

Definição 10.11 *Dois subconjuntos R e S do espaço euclidiano $\mathscr{E}$ são ditos ortogonais, e escrevemos $R \perp S$, se cada vetor de R é ortogonal a cada vetor de S. Um* ***sistema ortogonal de vetores*** *é um conjunto de vetores não nulos tais que quaisquer dois membros do conjunto são ortogonais. Um vetor x é dito* ***normalizado*** *se $\|x\| = 1$. Uma sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de vetores de $\mathscr{E}$ é um* ***sistema ortonormal*** *em $\mathscr{E}$ se*

$$\langle e_k, e_l\rangle = \delta_{kl}, \quad \forall k,l \in \mathbb{N}. \tag{10.13}$$

Num espaço vetorial de dimensão finita n, qualquer sistema ortonormal $S = \{e_1,\ldots,e_n\}$ com n vetores constitui uma base, isto é, qualquer vetor do espaço pode ser expresso de forma única como uma combinação linear dos elementos de S:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \quad \alpha_k = \langle e_k, x\rangle. \tag{10.14}$$

Num espaço vetorial de dimensão infinita, um sistema ortonormal infinito não é necessariamente uma base.

Num espaço de Hilbert separável todo sistema ortonormal é finito ou infinito enumerável. Para confirmar isto, suponha que $\{e_\sigma\}$ seja um sistema ortonormal infinito e $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ seja um subconjunto enumerável denso de $\mathscr{H}$. A distância entre dois elementos de $\{e_\sigma\}$ é

$$\|e_\sigma - e_{\sigma'}\|^2 = \langle e_\sigma - e_{\sigma'}, e_\sigma - e_{\sigma'}\rangle = \langle e_\sigma, e_\sigma\rangle + \langle e_{\sigma'}, e_{\sigma'}\rangle = 2 \implies \|e_\sigma - e_{\sigma'}\| = \sqrt{2}.$$

Considere, agora, bolas abertas $B_\sigma(r)$ de raio $r = \sqrt{2}/4$ centradas em cada elemento $\{e_\sigma\}$. Como D é denso, existem elementos x e x' de D tais que $x \in B_\sigma(r)$ e $x' \in B_{\sigma'}(r)$. Consequentemente,

$$\sqrt{2} = \|e_\sigma - e_{\sigma'}\| = \|e_\sigma - x + x - x' - (e_{\sigma'} - x')\| \le \|e_\sigma - x\| + \|x - x'\| + \|e_{\sigma'} - x'\|$$
$$< \frac{\sqrt{2}}{4} + \|x - x'\| + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \|x - x'\|,$$

donde $\|x - x'\| > \sqrt{2}/2$ e $x \neq x'$. Fica assim estabelecida uma aplicação injetiva de $\{e_\sigma\}$ em D, o que prova a enumerabilidade do sistema ortonormal $\{e_\sigma\}$.

Definição 10.12 *Seja S um conjunto de vetores num espaço euclidiano $\mathcal{E}$. O espaço vetorial formado por todas as combinações lineares finitas de elementos de S é o* ***espaço gerado*** *por S, denotado por* $\operatorname{span} S$ *ou também por* (S). *O subespaço vetorial fechado* $[S]$ *gerado por S é o fecho* $\overline{\operatorname{span} S}$ *de* $\operatorname{span} S$.

Teorema 10.13 *Se S é um conjunto enumerável de vetores de um espaço euclidiano $\mathcal{E}$, existe um sistema ortonormal T que gera o mesmo espaço que S, isto é,* $\operatorname{span} T = \operatorname{span} S$.

Demonstração. Seja $S = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$. Alguns vetores de S podem ser linearmente dependentes. Excluindo de S qualquer vetor y_{n+1} que seja linearmente dependente de $\{y_1, \ldots, y_n\}$, obtemos uma nova coleção $S_0 = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ de vetores linearmente independentes que gera o mesmo espaço que S: $\operatorname{span} S_0 = \operatorname{span} S$. A construção de T se faz pelo **método de ortonormalização de Gram-Schmidt.** Como $x_1 \neq 0$, o primeiro elemento de T é o vetor normalizado

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}.$$

Para obter e_2, retiramos de x_2 sua componente ao longo de e_1 e normalizamos:

$$e_2 = \frac{x_2 - \langle e_1, x_2\rangle e_1}{\|x_2 - \langle e_1, x_2\rangle e_1\|}.$$

O vetor $x_2 - \langle e_1, x_2\rangle e_1$ não é nulo (porque x_1 e x_2 são linearmente independentes) e é ortogonal a e_1:

$$\langle e_1, x_2 - \langle e_1, x_2\rangle e_1\rangle = \langle e_1, x_2\rangle - \langle e_1, x_2\rangle\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_1, x_2\rangle - \langle e_1, x_2\rangle = 0.$$

O terceiro elemento é obtido removendo de x_3 suas componentes ao longo de e_1 e e_2 e normalizando. Indutivamente, supondo já obtido o conjunto ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$, o elemento seguinte é definido por

$$e_n = \frac{x_n - \langle e_{n-1}, x_n\rangle e_{n-1} - \cdots - \langle e_1, x_n\rangle e_1}{\|x_n - \langle e_{n-1}, x_n\rangle e_{n-1} - \cdots - \langle e_1, x_n\rangle e_1\|}.$$

É imediato que e_n é ortogonal a todos os elementos anteriores $\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$, de modo que. $\{e_1,\dots,e_{n-1},e_n\}$ é um sistema ortonormal com um vetor a mais. O processo de ortonormalização deixa claro que os vetores $\{e_1,\dots,e_n\}$ são combinações lineares de $\{x_1,\dots,x_n\}$ e vice-versa. Desta forma, obtemos um sistema ortonormal $T=\{e_1,e_2,e_3,\dots\}$ que gera o mesmo espaço que S, pois qualquer combinação linear de elementos de S é uma combinação linear dos elementos correspondentes de T e vice-versa. ∎

Teorema 10.14 (Desigualdade de Bessel) *Se $\{e_n\}$ é um sistema ortonormal em $\mathscr{H}$, então*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x\rangle|^2 \le \|x\|^2 \qquad \forall x \in \mathscr{H}. \tag{10.15}$$

Demonstração. Dado $x \in \mathscr{H}$, sejam

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k \quad \text{e} \quad y_n = x - x_n.$$

Temos

$$\begin{aligned}\langle e_l, y_n\rangle = \langle e_l, x\rangle - \langle e_l, x_n\rangle &= \langle e_l, x\rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle\langle e_l, e_k\rangle \\ &= \langle e_l, x\rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle\delta_{kl} = \langle e_l, x\rangle - \langle e_l, x\rangle = 0\end{aligned}$$

para $l=1,\dots,n$, donde $y_n \perp x_n$. Portanto, pelo teorema de Pitágoras,

$$\|x\|^2 = \|x_n + y_n\|^2 = \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 \implies \|x_n\|^2 \le \|x\|^2.$$

Segue-se que

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2 = \|x_n\|^2 \le \|x\|^2,$$

donde, passando ao limite $n \to \infty$, deduz-se (10.15). ∎

Corolário 10.15 *Se $\{e_n\}$ é um sistema ortonormal em $\mathscr{H}$, a série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x\rangle e_k$$

é convergente qualquer que seja $x \in \mathscr{H}$.

Demonstração. Com $x_n = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k$ e $n > m$ temos

$$\|x_n - x_m\|^2 = \| \sum_{k=m+1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k \|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2 = |s_n - s_m|$$

onde

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2 .$$

Acontece que (s_n) é uma sequência de números reais monótona crescente e limitada superiormente por $\|x\|^2$, de acordo com a desigualdade de Bessel. Assim, (s_n) é convergente e, portanto, é uma sequência de Cauchy, de modo que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos os $n, m > N$,

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq |s_n - s_m| < \epsilon^2 \implies \|x_n - x_m\| < \epsilon .$$

Isto mostra que (x_n) é uma sequência de Cauchy e, portanto, possui um limite em $\mathscr{H}$. ∎

Definição 10.16 *A sequência* $\{e_n\}$ *em* $\mathscr{H}$ *é um* ***sistema ortonormal completo*** *ou* ***base ortonormal*** *de* $\mathscr{H}$ *se e somente se*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k = x \qquad \textbf{10.16}$$

para todo $x \in \mathscr{H}$. *Neste caso, escrevemos*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x\rangle e_k , \qquad \textbf{10.17}$$

onde os números complexos $\langle e_k, x\rangle$ *são chamados de* ***coeficientes de Fourier*** *de* x.

Esta definição estende para espaços de dimensão infinita a noção elementar de base ortonormal de um espaço vetorial de dimensão finita, e exprime com exatidão em que sentido um elemento arbitrário de um espaço de Hilbert pode ser representado como combinação linear dos vetores de base.

Exemplo 10.2.1

Em l^2 a sequência $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ com

$$e_1 = (1,0,0,0,\ldots) , e_2 = (0,1,0,0,\ldots) , e_3 = (0,0,1,0,\ldots) , \ldots$$

é uma base ortonormal. Dado $x = (\xi_1, \xi_2 \dots) \in l^2$ temos $\langle e_k, x\rangle = \xi_k$, donde

$$\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0,0,0,\dots).$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2 = 0$$

porque a série $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2$ é convergente. A sequência $\{e_n\}$ é chamada de **base canônica** de l^2.

Exemplo 10.2.2
Em $L^2(0,2\pi)$ a família de funções trigonométricas

$$\Phi_m(\phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{10.18}$$

constitui uma base ortonormal (Prugovečki 1981, p. 153; Boccara 1990, p. 143; Problema 10.15). Em $L^2(-1,1)$ a sequência $\left\{\sqrt{(2n+1)/2}\,P_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ obtida pela normalização dos polinômios de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{10.19}$$

é um sistema ortonormal completo (Boccara 1990, pp. 137-139). Em $L^2(\mathbb{R})$ as funções de Hermite

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \frac{e^{-x^2/2}H_n(x)}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}, \\ H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \quad n = 0,1,2,\dots \end{aligned} \tag{10.20}$$

formam uma base ortonormal. Funções de Laguerre e outros polinômios ortogonais, tais como os polinômios de Jacobi, Gegenbauer e Chebyshev, também são sistemas ortonormais completos (Boccara 1990, pp. 137-139).

Teorema 10.17 *Cada uma das três afirmações abaixo é condição necessária e suficiente para que o sistema ortonormal* $S = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ *seja uma base ortonormal de um espaço de Hilbert* $\mathscr{H}$.

(a) *O único vetor ortogonal a todos os elementos de S é o vetor nulo.*

(b) *Para quaisquer dois vetores* $x, y \in \mathscr{H}$ *vale a* ***relação de Parseval***

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, y \rangle . \tag{10.21}$$

(c) *Para todo* $x \in \mathscr{H}$,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x \rangle|^2 . \tag{10.22}$$

Demonstração. (a) A necessidade é evidente: se S é uma base ortonormal, $x \neq 0$ não pode ser ortogonal a todos os elementos de S devido a (10.16). Para provar a suficiência, suponha que o único vetor ortogonal a todos os elementos de S seja o vetor nulo. A ideia da demonstração é simples: depois da remoção de todas as componentes de um vetor qualquer $x \in \mathscr{H}$ ao longo dos elementos de S, deve restar o vetor nulo. Considere, portanto,

$$y_n = x - \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle e_k , \quad x \in \mathscr{H} .$$

Conforme o Corolário 10.15, existe $y \in \mathscr{H}$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Usando (10.12) obtemos

$$\langle e_l, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle e_l, y_n \rangle = \langle e_l, x \rangle - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle \delta_{kl} = \langle e_l, x \rangle - \langle e_l, x \rangle = 0$$

para todo l, de modo que $y = 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle e_k = x .$$

Isto mostra que S é uma base ortonormal de $\mathscr{H}$. (b) Dados $x, y \in \mathscr{H}$, se S é base ortonormal de $\mathscr{H}$ temos, por definição,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \;\text{ e }\; \lim_{n\to\infty} y_n = y , \;\text{ onde }\; x_n = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle e_k \;\text{ e }\; y_n = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, y \rangle e_k .$$

Levando em conta que

$$\langle x_n, y_n\rangle = \sum_{k,l=1}^{n} \overline{\langle e_k, x\rangle}\langle e_k, e_l\rangle\langle e_l, y\rangle = \sum_{k,l=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\delta_{kl}\langle e_l, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle e_k, y\rangle$$

e usando $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$, que fica para você demonstrar no Exercício 10.2.1 abaixo, resulta imediatamente a relação de Parseval (10.21). Reciprocamente, se vale a relação de Parseval e x é um vetor ortogonal a todos os elementos de S, tomando $y = x$ em (10.21) infere-se que $\|x\| = 0$, donde $x = 0$. Pela parte (a), conclui-se que S é uma base ortonormal. (c) Por fim, (10.22) decorre de (10.21) simplesmente fazendo $x = y$. Se (10.22) vale e x é ortogonal a todos os elementos de S, segue-se que $x = 0$. Novamente pela parte (a), S é uma base ortonormal. ∎

Exercício 10.2.1
Se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ num espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, prove que

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Os espaços de Hilbert separáveis caracterizam-se por admitirem uma base ortonormal enumerável, o que os torna de trato muito mais simples do que os espaços de Hilbert não-separáveis. Felizmente, todos os espaços de Hilbert que ocorrem na mecânica quântica e na teoria quântica de campos são separáveis.

Teorema 10.18 *Um espaço de Hilbert é separável se e somente se possui uma base ortonormal enumerável.*

Demonstração. Se $\mathscr{H}$ é separável, seja $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável denso em $\mathscr{H}$. Pelo procedimento de Gram-Schmidt, a partir de S obtemos o sistema ortonormal correspondente $T = \{e_1, e_2, \ldots\}$. Suponha que $x \in \mathscr{H}$ seja ortogonal a todos os elementos de T, isto é, $x \perp \operatorname{span} T$. Como S é denso, existe uma sequência de elementos de S que converge para x. Mas qualquer elemento de S é uma combinação linear de elementos de T. Logo, existe uma sequência (x_n) de elementos de $\operatorname{span} T$ que converge para x. Como $\langle x_n, x\rangle = 0$ para todo n, temos $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, x\rangle = 0$, donde $x = 0$.

Portanto, o único vetor ortogonal a todos os elementos de T é o vetor nulo e, pelo Teorema 10.17(a), T é uma base ortonormal. Reciprocamente, seja $T = \{e_1, e_2, \ldots\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$. Considere a coleção

$$R = \{r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n \,|\, \mathrm{Re}\, r_1, \ldots, \mathrm{Re}\, r_n, \mathrm{Im}\, r_1, \ldots, \mathrm{Im}\, r_n \in \mathbb{Q}, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

de todas as combinações lineares finitas de elementos de T com coeficientes cujas partes real e imaginária são números racionais. O conjunto R é enumerável, pois é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis. Seja $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x\rangle e_k$ um vetor arbitrário de $\mathcal{H}$. O método de provar que existe um elemento $\tilde{x} \in R$ arbitrariamente próximo de x é idêntico ao utilizado na demonstração da separabilidade de l^2 (Teorema 10.8), bastando substituir ξ_k por $\langle e_k, x\rangle$. ∎

Há diversas formas equivalentes de caracterizar sistemas ortonormais completos. O sistema ortonormal S é uma base ortonormal se e somente se é **total**: isto significa que o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de S é denso em $\mathcal{H}$, ou seja, $\overline{\mathrm{span}\, S} = \mathcal{H}$. Outra caracterização: uma base ortonormal é um sistema ortonormal **maximal**, isto é, que não é subconjunto próprio de nenhum outro sistema ortonormal de $\mathcal{H}$. Vale ressaltar, ainda, que é somente para uma base ortonormal que a desigualdade de Bessel se transforma numa igualdade. Tudo isso explica o uso da expressão sistema ortonormal *completo* como sinônimo de base ortonormal. Sistemas ortonormais completos são também chamados de **bases hilbertianas**.

A noção de dimensionalidade de um espaço de Hilbert é um pouco sutil. Num espaço vetorial de dimensão finita n munido de produto interno, qualquer base ortonormal consiste exatamente em n vetores e há no máximo n vetores linearmente independentes. Num espaço de Hilbert, a cardinalidade de uma base hilbertiana não é necessariamente a mesma de um sistema maximal de vetores linearmente independentes. Por exemplo, os vetores

$$x_a = (a, a^2, a^3, \ldots), \quad a \in (0,1) \qquad \mathbf{10.23}$$

pertencem ao espaço de Hilbert l^2, pois a série $\sum_{n=1}^{\infty} a^{2n}$ é convergente, e são linearmente independentes, isto é,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_i x_{a_i} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = 0 \\ a_1^2\alpha_1 + \cdots + a_n^2\alpha_n = 0 \\ a_1^3\alpha_1 + \cdots + a_n^3\alpha_n = 0 \\ a_1^4\alpha_1 + \cdots + a_n^4\alpha_n = 0 \\ \vdots \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

O conjunto $\{x_a\}$ tem a cardinalidade do contínuo embora qualquer base ortonormal de l^2 seja enumerável. A cardinalidade de um sistema ortonormal completo é chamada de **dimensão ortogonal** de um espaço de Hilbert. Esta definição faz sentido porque todas as bases ortonormais de um espaço de Hilbert têm a mesma cardinalidade (Akhiezer & Glazman 1963, §9).

Exercício 10.2.2
Prove que os vetores x_a definidos por (10.23) são linearmente independentes. Sugestão: suponha que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, o que pode ser conseguido por uma numeração adequada, divida a equação

$$a_1^k\alpha_1 + \cdots + a_{n-1}^k\alpha_{n-1} + a_n^k\alpha_n = 0$$

por a_n^k e passe ao limite $k \to \infty$.

10.3 *Isomorfismo de Espaços de Hilbert*

Como vimos no estudo axiomático dos números reais, o conceito de isomorfismo é de enorme importância na Matemática, pois permite identificar diferentes realizações de uma mesma estrutura abstrata.

Definição 10.19 *Dois espaços euclidianos $\mathscr{E}_1$ e $\mathscr{E}_2$ com produtos internos $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$, respectivamente, são **isomorfos** se existe uma aplicação linear bijetiva $U : \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ tal que*

$$\langle x_1, y_1\rangle_1 = \langle Ux_1, Uy_1\rangle_2 \quad \forall x_1, y_1 \in \mathscr{E}_1 . \qquad 10.24$$

*Um mapeamento U com estas propriedades é dito uma **transformação unitária** de $\mathscr{E}_1$ sobre $\mathscr{E}_2$.*

Um isomorfismo entre espaços euclidianos, portanto, é uma aplicação linear bijetiva que preserva o produto interno.

Teorema 10.20 *Todos os espaços de Hilbert separáveis de dimensão infinita são isomorfos a l^2 e, consequentemente, isomorfos entre si.*

Demonstração. Se $\mathscr{H}$ é um espaço de Hilbert separável, pelo Teorema 10.18 existe uma base ortonormal enumerável $\{e_n\}$ em $\mathscr{H}$. Dado $x \in \mathscr{H}$, defina $Ux \in l^2$ de tal modo que sua k-ésima componente seja $\langle e_k, x\rangle_{\mathscr{H}}$. A correspondência assim estabelecida é linear e, de acordo com a relação de Parseval (10.21),

$$\langle x,y\rangle_{\mathscr{H}} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x,e_k\rangle_{\mathscr{H}} \langle e_k,y\rangle_{\mathscr{H}} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle e_k,x\rangle}_{\mathscr{H}} \langle e_k,y\rangle_{\mathscr{H}} = \langle Ux, Uy\rangle_{l^2}\,.$$

Só resta mostrar que a aplicação $x \mapsto Ux$ é bijetiva. A injetividade é imediata: se $Ux = Uy$ segue-se que $\langle e_k, x-y\rangle_{\mathscr{H}} = \langle Ue_k, U(x-y)\rangle_{l^2} = 0$ para todo k, que implica $x - y = 0$ porque $\{e_n\}$ é base ortonormal. Para provar que o mapeamento é sobrejetivo, note que para cada $x' = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$ a sequência (x_n) de $\mathscr{H}$ definida por $x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ é uma sequência de Cauchy. De fato, se $n > m$ temos

$$\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\xi_k|^2 \to 0 \text{ para } m,n \to \infty$$

porque $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2$ é uma série convergente (converge para $\|x'\|_{l^2}^2$). Logo, $x_n \to x$ para algum $x \in \mathscr{H}$ e

$$\langle e_l,x\rangle_{\mathscr{H}} = \lim_{n\to\infty} \langle e_l,x_n\rangle_{\mathscr{H}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \langle e_l,e_k\rangle_{\mathscr{H}} = \xi_l\,.$$

Isto mostra que todo $x' \in l^2$ é imagem de um elemento $x \in \mathscr{H}$, o que completa a prova de que o mapeamento em questão é bijetivo. ∎

Este resultado um pouco surpreendente mostra que todos os espaços de Hilbert separáveis são essencialmente idênticos a l^2. A mecânica quântica foi originalmente descoberta em duas formas completamente distintas. A mecânica matricial de Heisenberg (1925) lida com vetores e matrizes em l^2, ao passo que a mecânica ondulatória de Schrödinger (1926) envolve funções e operadores em $L^2(\mathbb{R}^n)$. O isomorfismo entre esses dois espaços de Hilbert é

a base matemática da equivalência física das duas formulações, demonstrada independentemente por Schrödinger e Eckart em 1926. Mesmo na teoria quântica de campos, que descreve sistemas com um número infinito de graus de liberdade, o espaço de estados é um espaço de Hilbert separável, logo isomorfo a l^2. A despeito disto, realizações particulares de espaços de Hilbert separáveis podem desfrutar de características específicas, o que permite a introdução de estruturas não partilhadas por outras realizações. Isto confere uma grande riqueza aos espaço de Hilbert separáveis.

Teorema 10.21 *Um isomorfismo entre espaços de Hilbert separáveis* $\mathscr{H}$ *e* $\mathscr{H}'$ *mapeia bases ortonormais em bases ortonormais.*

Demonstração. Denotemos por $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ os produtos internos em $\mathscr{H}$ e $\mathscr{H}'$, respectivamente. Se $\{e_n\}$ é base ortonormal de $\mathscr{H}$ e $\{e'_n\}$ é sua imagem sob o isomorfismo, então

$$\langle e'_k, e'_l\rangle_2 = \langle e_k, e_l\rangle_1 = \delta_{kl}\,,$$

de modo que $\{e'_n\}$ é um sistema ortonormal de $\mathscr{H}'$. Como todo $x' \in \mathscr{H}'$ possui uma única imagem inversa $x \in \mathscr{H}$ e a imagem de 0 é 0, de

$$\langle e_k, x\rangle_1 = \langle e'_k, x'\rangle_2$$

deduz-se que o único vetor de $\mathscr{H}'$ ortogonal a todos os elementos de $\{e'_n\}$ é o vetor nulo. Pelo Teorema 10.17(a), $\{e'_n\}$ é base ortonormal de $\mathscr{H}'$. ∎

Leituras Adicionais Selecionadas[1]

• Akhiezer, N. I. e Glazman, I. M. 1963 *Theory of Linear Operators in Hilbert Space.*

Boccara, N. 1990 *Functional Analysis: An Introduction for Physicists.*

Kreyszig, E. 1978 *Introductory Functional Analysis With Applications.*

• E. Prugovečki, E. 1981 *Quantum Mechanics in Hilbert Space.*

Reed, M. e Simon, B. 1980 *Methods of Modern Mathematical Physics.* Vol. I: *Functional Analysis.*

Teschl, G. 2009 *Mathematical Methods in Quantum Mechanics.*

1. A lista completa de referências, com plenos detalhes bibliográficos, encontra-se na Bibliografia no fim do livro. O símbolo • destaca obras cuja leitura é altamente recomendada.

Problemas

10.1. Seja X um espaço vetorial com produto interno. (a) Descreva todos os pares de vetores x,y para os quais

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 .$$

O que se pode concluir se X for um espaço vetorial real? (b) Descreva todos os pares de vetores x,y para os quais

$$||x+y|| = ||x|| + ||y|| .$$

10.2. Seja $C[0,1]$ o espaço vetorial das funções contínuas em $[0,1]$, equipado com a norma $||f|| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Mostre que esta norma não é induzida por nenhum produto interno. Sugestão: encontre um exemplo que viole a lei do paralelogramo.

10.3. Seja $w = (w_1, w_2, \ldots)$ com $w_i > 0$. Defina $l^2(w)$ como o espaço vetorial de todas as sequências complexas $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ tais que $\sum_{i=1}^{\infty} w_i |\xi_i|^2 < \infty$. Mostre que $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} w_i \overline{\xi}_i \eta_i$ define um produto interno em $l^2(w)$. Prove que, com este produto interno, $l^2(w)$ é um espaço de Hilbert.

10.4. Se X é um espaço vetorial complexo com produto interno e se $x,y \in X$, prove que $x \perp y$ se e somente se $||\alpha x + \beta y||^2 = ||\alpha x||^2 + ||\beta y||^2$ para todos os números complexos α e β.

10.5. Exiba uma sequência de vetores (x_n) num espaço de Hilbert tal que $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2 < \infty$ mas $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ não é uma sequência de Cauchy.

10.6. Seja X um espaço vetorial com produto interno que contém um conjunto ortonormal completo finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Prove que X tem dimensão finita.

10.7. Prove que a norma usual (8.29) em l^p não é induzida por um produto interno se $p \neq 2$. Sugestão: encontre um exemplo que viole a lei do paralelogramo.

10.8. Seja X um espaço com produto interno. Prove a identidade de Apolônio

$$||z-x||^2 + ||z-y||^2 = \frac{1}{2}||x-y||^2 + 2||z - \frac{x+y}{2}||^2 .$$

10.9. Seja $\{e_n\}$ um sistema ortonormal num espaço com produto interno X. Prove que, quaisquer que sejam $x,y \in X$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle|\,|\langle e_n, y\rangle| \leq ||x||\,||y||.$$

10.10. Prove que a sequência de funções $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ converge pontualmente para 0 em $[0,\infty)$ mas não converge para zero em $L^2(0,\infty)$.

10.11. Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$ e considere a sequência (f_n) com $f_n(x) = f(x-2n)$. Prove que (f_n) converge fracamente para zero. Sugestão: escreva $\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{n} + \int_{n}^{\infty}$ e use a desigualdade de Schwarz para integrais.

10.12. Seja (x_n) uma sequência num espaço de Hilbert. Prove que se $x_n \xrightarrow{w} x$ mas $||x_n|| \not\to ||x||$, então $x_n \not\to x$.

10.13. Seja (x_n) uma sequência num espaço com produto interno. Prove que se $||x_n|| \to ||x||$ e $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$, então $x_n \to x$.

10.14. Seja X um espaço com produto interno. (a) Prove que se $a,b \in X\setminus\{0\}$ e se $\tilde{a} = a/||a||^2$ e $\tilde{b} = b/||b||^2$, então

$$||\tilde{a}-\tilde{b}|| = \frac{||a-b||}{||a||\,||b||}.$$

(b) Usando o resultado anterior, prove a desigualdade de Ptolomeu:

$$||a-c||\,||b-d|| \leq ||a-b||\,||c-d|| + ||a-d||\,||b-c|| \quad \forall a,b,c,d \in X.$$

10.15. Seja (a,b) um intervalo finito e (ϕ_n) uma sequência ortonormal em $L^2(a,b)$. Conforme o critério de completeza de Dalzell, $\{\phi_n\}$ é uma base ortonormal em $L^2(a,b)$ se e somente se

$$\frac{2}{(b-a)^2}\sum_n \int_a^b \left|\int_a^x \phi_n(t)\,dt\right|^2 dx = 1.$$

Em Higgins (1977) há uma prova disto. Com base neste critério, mostre que

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{b-a}}\,\text{sen}\,\frac{n\pi(x-a)}{b-a},\ n = 1,2,3,\ldots\right\} \text{ e } \left\{\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}},\ m = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots\right\}$$

são bases ortonormais em $L^2(a,b)$ e $L^2(0,2\pi)$, respectivamente.

10.16. Sejam $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ as funções definidas por

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(x-i)^n}{(x+i)^{n+1}}, \quad n = 0,1,2,\ldots .$$

Prove que $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ é um sistema ortonormal em $L^2(\mathbb{R})$. Pode-se provar (Higgins 1977) que este sistema ortonormal é completo, isto é, constitui uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

11

Operadores Lineares

A teoria dos operadores lineares em espaços de Hilbert é essencial para a investigação do arcabouço geral da mecânica quântica, em cujo contexto a mecânica matricial de Heisenberg e a mecânica ondulatória de Schrödinger aparecem como realizações particulares de uma única estrutura abstrata.

11.1 *Operadores Lineares: Definição Geral*

Genericamente, um operador linear é uma aplicação linear entre dois espaços vetoriais. Comecemos definindo operadores lineares em espaços de Hilbert.

Definição 11.1 *Um **operador** A no espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ é uma aplicação*

$$x \mapsto y = Ax, \quad x \in \mathrm{D}(A), \quad y \in \mathscr{H}$$

definida no subconjunto $\mathrm{D}(A)$ *de* $\mathscr{H}$. *O operador A é **linear** se* $\mathrm{D}(A)$ *é um espaço vetorial e*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \quad \forall x,y \in \mathrm{D}(A), \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}.$$

O conjunto $\mathrm{D}(A)$ *sobre cujos vetores a ação do operador A está definida é chamado de **domínio** de A. A **imagem** ou **alcance** de A, denotado por* $\mathrm{Ran}(A)$, *é o conjunto dos elementos* $y \in \mathscr{H}$ *tais que* $y = Ax$ *para algum* $x \in \mathrm{D}(A)$.

Definição 11.2 *Dois operadores A e B são iguais se e somente se* $\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}(B)$ *e, em seu domínio comum,* $Ax = Bx$.

É importante sublinhar que a definição de um operador envolve necessariamente a especificação do seu domínio, e a condição $\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}(B)$ é essencial para a igualdade dos operadores A e B, sua desconsideração podendo levar a conclusões errôneas.

Definição 11.3 *O operador B é uma* ***extensão*** *de A se* $D(A) \subset D(B)$ *e* $Ax = Bx$ *para todo* $x \in D(A)$. *Neste caso, escrevemos* $A \subset B$ *ou* $B \supset A$.

11.2 *Operadores Limitados*

Diferentemente do que ocorre em espaços vetoriais de dimensão finita, em espaços de dimensão infinita há duas classes de operadores lineares: os contínuos ou limitados, e os descontínuos ou ilimitados.

Definição 11.4 *Um operador A é* ***contínuo em*** $x_0 \in D(A)$ *se para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\|Ax - Ax_0\| < \epsilon \quad \textit{sempre que} \quad \|x - x_0\| < \delta\,, \quad x \in D(A)\,.$$

O operador A é dito ***contínuo*** *se ele é contínuo em todos os pontos de seu domínio.*

Exemplo 11.2.1

Seja $y \neq 0$ um vetor fixo de $\mathscr{H}$ e defina o operador linear T por

$$Tx = \langle y, x\rangle y\,, \quad x \in \mathscr{H}\,.$$

O domínio de T é o espaço de Hilbert inteiro e T é contínuo porque, para qualquer $x_0 \in \mathscr{H}$,

$$\|Tx - Tx_0\| = \|\langle y, x - x_0\rangle y\| = |\langle y, x - x_0\rangle|\,\|y\| \leq \|x - x_0\|\,\|y\|\,\|y\|,$$

de modo que, tomando $\delta = \epsilon/\|y\|^2$, resulta que $\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|Tx - Tx_0\| < \epsilon$.

Exercício 11.2.1

Prove que o operador A é contínuo se e somente se sempre que $(x_n) \in D(A)$ converge para $x \in D(A)$ tem-se $\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax$.

Definição 11.5 *Um operador A é* ***limitado*** *se existe* $C \geq 0$ *tal que*

$$\|Ax\| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in D(A)\,. \tag{11.1}$$

A menor constante C para a qual (11.1) *é válida é definida como a* ***norma do operador*** *A, denotada por* $\|A\|$.

Para um operador linear, as noções de limitação e continuidade são equivalentes.

Teorema 11.6 *Um operador* ***linear*** *é limitado se e somente se é contínuo.*

Demonstração. Se A é um operador linear limitado, $\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| \leq \|A\|\,\|x - x_0\|$. Portanto, dado $\epsilon > 0$ basta tomar $\delta = \epsilon/\|A\|$ para que se tenha $\|Ax - Ax_0\| < \epsilon$ sempre que $\|x - x_0\| < \delta$. Como $x_0 \in D(A)$ é arbitrário, A é contínuo. Suponha, agora, que A é contínuo. Dado $\epsilon > 0$, a continuidade de A em $x = 0$ implica a existência de $\delta > 0$ tal que $\|Ax\| < \epsilon$ para todo $x \in D(A)$ tal que $\|x\| < \delta$. Para qualquer $x \neq 0$ em $D(A)$, o vetor $y = \dfrac{\delta}{2\|x\|}x$ pertence ao domínio de A e satisfaz $\|y\| = \delta/2 < \delta$, donde

$$\frac{\delta}{2\|x\|}\|Ax\| = \left\|A\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x\right)\right\| = \|Ay\| < \epsilon \Longrightarrow \|Ax\| < \frac{2\epsilon}{\delta}\|x\|.$$

Como isto vale para todo $x \neq 0$ em $D(A)$, o operador A é limitado. ∎

Exercício 11.2.2

Prove que um operador *linear* é contínuo se e somente se ele é contínuo em $x = 0$.

Exemplo 11.2.2

Em $L^2(0,1)$ o operador integral

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

é limitado. Conforme o Problema A.7 do Apêndice A, $(Tf)(x)$ existe para cada $x \in [0,1]$ porque $f \in L^1(0,1)$ sempre que $f \in L^2(0,1)$. Além disso, como já veremos, Tf é de quadrado integrável em $[0,1]$, de modo que $D(A) = L^2(0,1)$. Pela desigualdade de Schwarz para integrais,

$$|(Tf)(x)|^2 = \left|\int_0^x 1 \cdot f(x)\,dx\right|^2 \leq \int_0^x 1^2\,dx \int_0^x |f(x)|^2\,dx$$
$$\leq \int_0^x dx \int_0^1 |f(x)|^2\,dx = x\|f\|^2,$$

donde

$$\|Tf\|^2 = \int_0^1 |(Tf)(x)|^2 dx \leq \|f\|^2 \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}\|f\|^2.$$

Assim, T é limitado e $\|T\| \leq 1/\sqrt{2}$.

A norma de um operador, da qual temos falado de forma um pouco vaga, merece uma definição mais precisa.

Definição 11.7 *A norma de um operador A é*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|, \tag{11.2}$$

onde o supremo é tomado sobre os vetores $x \in D(A)$.

Se $\|A\| < \infty$ o operador A é limitado; caso contrário, A é ilimitado. O nome "norma" de A para $\|A\|$ é justificado no exercício a seguir.

Exercício 11.2.3
Prove que a aplicação $\|\cdot\|$ definida por (11.2) é uma norma sobre o espaço vetorial dos operadores limitados definidos sobre todo o espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, com $A+B$ e αA dados pelas definições naturais $(A+B)x = Ax + Bx$ e $(\alpha A)x = \alpha Ax$, onde $\alpha \in \mathbb{C}$.

Exemplo 11.2.3
O operador do Exemplo 11.2.1 é limitado e sua norma $\|T\| = \|y\|^2$. Com efeito, tomando $x_0 = 0$ no referido exemplo vê-se que $\|T\| \leq \|y\|^2$. A hipótese $\|T\| < \|y\|^2$ está excluída porque $\|Ty\| = \|y\|^3$, o que prova que $\|T\| = \|y\|^2$.

ESPAÇO DOS OPERADORES LIMITADOS

O domínio e o contradomínio de uma aplicação linear não precisam ser subconjuntos do mesmo espaço vetorial. Sejam X e Y espaços normados e seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear (chamada usualmente de *operador linear*) definida em X. A norma de T é definida por

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y . \qquad 11.3$$

Se $\|T\| < \infty$ o operador linear T é dito limitado. A família dos operadores lineares limitados de X em Y é um espaço vetorial com a definição natural de soma de operadores e multiplicação de operador por um escalar: $S+T$ e λT são os operadores definidos por $(S+T)x = Sx + Tx$ e $(\lambda T)x = \lambda(Tx)$. Esse espaço vetorial, equipado com a norma (11.3), é denotado por $L(X,Y)$ ou $\mathscr{L}(X,Y)$. Quando $X = Y$, costuma-se escrever simplesmente $\mathscr{L}(X)$, em vez de $\mathscr{L}(X,X)$. Um resultado interessante é o seguinte: se X é um espaço normado qualquer e Y é um espaço de Banach, então $\mathscr{L}(X,Y)$ é um espaço de Banach (Problema 11.10).

Exemplos de Operadores Ilimitados

Quase todos os operadores de interesse físico são ilimitados.

Exemplo 11.2.4

O operador $P = -i\dfrac{d}{dx}$ em $L^2(\mathbb{R})$ não é limitado. Para a sequência

$$f_n(x) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/4} e^{-nx^2/2} \in L^2(\mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{N},$$

temos $\|f_n\| = 1$ e

$$(Pf_n)(x) = -i\frac{df_n(x)}{dx} = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/4} inxe^{-nx^2/2} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Logo,

$$\|Pf_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |(Pf_n)(x)|^2 dx$$
$$= \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2} n^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-nx^2} dx = \frac{n}{2} \to \infty \text{ quando } n \to \infty,$$

de modo que P não é limitado. Embora não tenhamos especificado o domínio de P, é claro que $D(P)$ contém todas as funções diferenciáveis de $L^2(\mathbb{R})$ cujas derivadas pertencem a $L^2(\mathbb{R})$.

Exercício 11.2.4
O operador de posição Q em $L^2(\mathbb{R})$ definido por

$$(Qf)(x) = xf(x),$$

com domínio

$$\mathrm{D}(Q) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

não é limitado. Prove esta afirmação tomando uma sequência (f_n) de funções normalizadas do domínio de Q, com $f_n(x)$ concentrada em torno de $x = n$, e calculando $\|Qf_n\|^2$.

Exemplo 11.2.5
O operador Q em $L^2(0,1)$ é limitado. De fato,

$$\|Qf\|^2 = \int_0^1 x^2 |f(x)|^2 dx \le \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \|f\|^2,$$

de modo que Q é limitado e $\|Q\| \le 1$. Isto mostra também que Q está definido sobre todos os elementos de $\mathscr{H} = L^2(0,1)$, isto é, $\mathrm{D}(Q) = \mathscr{H}$. É possível concluir que $\|Q\| = 1$ considerando a sequência normalizada de elementos de $\mathscr{H}$ definida por $f_n(x) = \sqrt{2n+1}\, x^n$, para a qual

$$\begin{aligned} \|Qf_n\| &= \sqrt{\int_0^1 (2n+1) x^{2n+2} dx} \\ &= \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} \to 1 \ \text{ para } \ n \to \infty, \end{aligned}$$

que prova que $\sup_{|f|=1} \|Qf\|$ não pode ser menor que 1. Resultados análogos valem para o operador de posição em $L^2(a,b)$, que, na mecânica quântica, é o espaço de estados de uma partícula confinada a uma caixa unidimensional de largura $b-a$.

Diferentemente do operador de multiplicação Q em $L^2(0,1)$, o operador diferencial $-i d/dx$ não é limitado em $L^2(0,1)$ — Problema 11.13.

EXTENSÃO DE OPERADORES LIMITADOS

Um operador linear limitado sempre pode ter seu domínio de definição estendido a todo o espaço de Hilbert sem aumento de sua norma. Se o domínio inicial de definição do operador é denso, a extensão limitada é única.

Teorema 11.8 *Seja A um operador linear limitado e com domínio denso num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Existe uma única extensão limitada de A a todo o espaço de Hilbert, denotada por $\tilde{A}$, com $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.*

Demonstração. Defina $\tilde{A}x = Ax$ para todo $x \in D(A)$. Se $x \notin D(A)$, existe uma sequência $(x_n) \in D(A)$ com $x_n \to x$ porque $D(A)$ é denso em $\mathcal{H}$. Como A é limitado,

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \, \|x_m - x_n\| .$$

Segue-se que (Ax_n) é uma sequência de Cauchy e, portanto, $Ax_n \to \tilde{x}$ para algum $\tilde{x} \in \mathcal{H}$. Defina $\tilde{A}x = \tilde{x} = \lim_{n\to\infty} Ax_n$. Esta definição está bem feita porque não depende da sequência: se (x'_n) é outra sequência de elementos do domínio de A que converge para x, a estimativa

$$\|Ax_n - Ax'_n\| = \|A(x_n - x'_n)\| \leq \|A\| \, \|x_n - x'_n\| \leq \|A\| \Big(\|x_n - x\| + \|x'_n - x\| \Big)$$

prova que $\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Ax'_n$. É imediato que $\tilde{A}$ é linear. Além disso, de

$$\|\tilde{A}x\| = \| \lim_{n\to\infty} Ax_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A\| \, \|x_n\| = \|A\| \, \|x\|$$

deduz-se que $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$. Por outro lado, é claro que $\|\tilde{A}\| \geq \|A\|$ porque $D(\tilde{A}) = \mathcal{H} \supset D(A)$. Portanto, $\|\tilde{A}\| = \|A\|$. Para demonstrar a unicidade, seja A' outra extensão limitada de A. Como A' e $\tilde{A}$ são limitados, $A' - \tilde{A}$ é limitado. Seja (x_n) uma sequência em $D(A)$ que converge para $x \in \mathcal{H}$. Pelo Exercício 11.2.1, temos

$$A'x - \tilde{A}x = (A' - \tilde{A})x = \lim_{n\to\infty} (A' - \tilde{A})x_n = \lim_{n\to\infty} (A - A)x_n = 0 .$$

Como isto vale para todo $x \in \mathcal{H}$, segue-se que $A' = \tilde{A}$. ∎

Em virtude deste resultado, de ora em diante suporemos que todos os operadores limitados estão definidos sobre todo o espaço de Hilbert.

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE OPERADORES LIMITADOS

Num espaço vetorial de dimensão finita, um operador linear é univocamente determinado por sua matriz numa dada base. É notável que o mesmo se dá com operadores *limitados* num espaço de Hilbert separável.

Teorema 11.9 *Num espaço de Hilbert separável, um operador linear limitado A é univocamente determinado por seus elementos de matriz $A_{ij} = \langle e_i, Ae_j\rangle$ em relação a uma base ortonormal $\{e_n\}$.*

Demonstração. Seja $\{e_n\}$ uma base ortonormal de um espaço de Hilbert separável. Queremos provar que se $\langle e_i, Ae_j\rangle = A_{ij}$ e se $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$, então $Ax = \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i$ onde $y_i = \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} x_j$. Para tanto, seja $x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. Temos

$$Ax_n = \sum_{j=1}^{n} x_j A e_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} x_j \langle e_i, Ae_j\rangle e_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^{(n)} e_i ,$$

onde

$$y_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j .$$

Como $x_n \to x$, segue-se que $Ax_n \to Ax$ porque A é limitado. Portanto, escrevendo

$$Ax = y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i ,$$

temos

$$y_i = \langle e_i, Ax\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle e_i, Ax_n\rangle = \lim_{n\to\infty} y_i^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} x_j ,$$

como queríamos demonstrar. ∎

INVERSO DE UM OPERADOR

Se o operador (não necessariamente linear) A é injetivo, isto é, associa a cada par de elementos distintos de $D(A)$ um par de elementos distintos de $\text{Ran}(A)$, então A possui um inverso denotado por A^{-1}, que mapeia elementos de $\text{Ran}(A)$ em elementos de $D(A)$. Temos $A^{-1}y = x$ se e somente se $y = Ax$, com $D(A^{-1}) = \text{Ran}(A)$ e $\text{Ran}(A^{-1}) = D(A)$. Se A tem inverso e $D(A) = \text{Ran}(A) = \mathscr{H}$, então $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, onde I é o operador identidade em $\mathscr{H}$ definido por $Ix = x$ para todo $x \in \mathscr{H}$. Se o operador A é *linear*, ele possui

inverso se e somente se a única solução de $Ax = 0$ é $x = 0$, pois só assim fica assegurado que elementos distintos de $D(A)$ são mapeados em elementos distintos de $\mathrm{Ran}(A)$. O inverso de um operador linear é necessariamente linear (Problema 11.1).

11.3 *Convergência de Operadores Limitados*

Em diversas situações um operador limitado A é definido como limite de uma sequência (A_n) de operadores limitados. Em cada caso, é preciso especificar em que sentido se tem $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Há três formas possíveis de convergência de uma sequência (A_n) de operadores limitados:

Convergência fraca: $\lim_{n\to\infty} \langle A_n x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle \quad \forall x, y \in \mathscr{H}$.

Convergência forte: $\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0 \quad \forall x \in \mathscr{H}$.

Convergência uniforme: $\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$.

Exercício 11.3.1
Prove que convergência uniforme $\Longrightarrow$ convergência forte $\Longrightarrow$ convergência fraca.

Exemplo 11.3.1
Seja $A_n : l^2 \to l^2$ definido por

$$A_n x = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \,\text{zeros}}, \xi_1, \xi_2, \ldots), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l^2.$$

Se $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots) \in l^2$ temos, pela desigualdade de Schwarz,

$$|\langle A_n x, y\rangle|^2 = |\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\xi}_k \eta_{n+k}|^2 \le \|x\|^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |\eta_k|^2 \to 0 \text{ para } n \to \infty$$

já que a série $\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2$ é convergente. Portanto, a sequência (A_n) converge fracamente para zero, isto é, para o operador nulo. No entanto, (A_n) não converge fortemente para zero porque $\|A_n x - 0x\| = \|A_n x\| = \|x\|$, que

não tende a zero se $x \neq 0$. A sequência (A_n) também não converge uniformemente (na norma) para zero porque, como acabamos de ver, $\|A_n\| = 1$ para todo n.

Exemplo 11.3.2
Seja A_n a seguinte sequência de operadores em $L^2(\mathbb{R})$:

$$(A_n f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |x| < n \\ 0 & \text{se } |x| \geq n \end{cases}.$$

Como

$$\|A_n f - f\|^2 = \int_{|x|>n} |f(x)|^2 dx,$$

segue-se que $\|A_n f - f\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, A_n converge fortemente para o operador identidade. No entanto, A_n não converge uniformemente para I. De fato, $\|A_n - I\| \leq 1$ mas na verdade $\|A_n - I\| = 1$ para cada n porque $A_n f = 0$ para qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$ cujo suporte está fora do intervalo $(-n, n)$.

Exemplo 11.3.3
Sejam A_n e A os operadores integrais em $L^2(\mathbb{R})$ definidos por

$$(A_n f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x,y) f(y) dy, \qquad (Af)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y) f(y) dy,$$

onde K_n e K pertencem a $L^2(\mathbb{R}^2)$ e $K_n \to K$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$, isto é,

$$C_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |K_n(x,y) - K(x,y)|^2 dx dy} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

A desigualdade de Schwarz permite escrever

$$\begin{aligned} |((A_n - A)f)(x)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [K_n(x,y) - K(x,y)] f(y) dy \right|^2 \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |K_n(x,y) - K(x,y)| |f(y)| dy \right)^2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |K_n(x,y) - K(x,y)|^2 dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

donde

$$\|(A_n - A)f\| \leq C_n\|f\| \implies \|A_n - A\| \leq C_n .$$

Como $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$, segue-se que A_n converge uniformemente para A.

Em espaços euclidianos de dimensão finita estas três noções de convergência são equivalentes (Problema 11.19).

11.4 *Complementos Ortogonais e Funcionais Lineares*

Um subconjunto M de um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ é uma **variedade linear** se a hipótese $x,y \in \mathsf{M}$ implica $\alpha x + \beta y \in \mathsf{M}$ para quaisquer $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$. M é uma variedade linear fechada se $\overline{\mathsf{M}} = \mathsf{M}$ ou, o que dá no mesmo, se toda sequência convergente de elementos de M converge para um elemento de M. Uma variedade linear fechada de um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ é, por si só, um espaço de Hilbert; em outras palavras, é um subespaço de Hilbert de $\mathscr{H}$.

Definição 11.10 *O* ***complemento ortogonal*** $S^{\perp}$ *de um subconjunto* S *de um espaço de Hilbert* $\mathscr{H}$ *é o conjunto*

$$S^{\perp} = \{x \in \mathscr{H} \mid \langle x,y\rangle = 0 \quad \forall y \in S\} \tag{11.4}$$

dos vetores ortogonais a todos os vetores de S.

É digno de nota que o complemento ortogonal $S^{\perp}$ é uma variedade linear mesmo que o conjunto de vetores S não seja uma variedade linear.

Exercício 11.4.1
Se M é uma variedade linear, prove que $\mathsf{M}^{\perp}$ é uma variedade linear fechada. Prove, ainda, que $\mathsf{M}^{\perp\perp} = \overline{\mathsf{M}}$.

Em $\mathbb{R}^3$, um plano passando pela origem é uma variedade linear fechada. Dado um ponto p qualquer de $\mathbb{R}^3$, existe um único ponto q do referido plano cuja distância ao ponto p é a menor possível. O vetor que liga q a p é ortogonal ao plano. Pois num espaço de Hilbert genérico as coisas se passam exatamente da mesma maneira. É essa estrutura geométrica simples que torna

os espaços de Hilbert muito mais fáceis de lidar do que os espaços de Banach arbitrários.

Teorema 11.11 *Seja* M *uma variedade linear fechada de um espaço de Hilbert* $\mathscr{H}$ *e seja* x *um vetor de* $\mathscr{H}$. *Definindo a distância de* x *a* M *por* $d = \inf_{\tilde{y}\in M}\|\tilde{y} - x\|$, *existe um único vetor* $y \in \mathsf{M}$ *tal que* $\|y - x\| = d$. *Além disso, o vetor* $z = y - x$ *é ortogonal a* M.

Demonstração. Como

$$d = \inf_{\tilde{y}\in \mathsf{M}} \|\tilde{y} - x\|,$$

existe uma sequência $(\tilde{y}_n)$ de vetores de M tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{y}_n - x\| = d.$$

A lei do paralelogramo (10.9) aplicada aos vetores $\tilde{y}_n - x$ e $\tilde{y}_m - x$ fornece

$$\|\tilde{y}_n + \tilde{y}_m - 2x\|^2 + \|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m\|^2 = 2\|\tilde{y}_n - x\|^2 + 2\|\tilde{y}_m - x\|^2,$$

que equivale a

$$\|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m\|^2 = 2\|\tilde{y}_n - x\|^2 + 2\|\tilde{y}_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{\tilde{y}_n + \tilde{y}_m}{2} - x\right\|^2.$$

Como $(\tilde{y}_n + \tilde{y}_m)/2 \in \mathsf{M}$, temos

$$\left\|\frac{\tilde{y}_n + \tilde{y}_m}{2} - x\right\| \geq d,$$

de modo que

$$\|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m\|^2 \leq 2\|\tilde{y}_n - x\|^2 + 2\|\tilde{y}_m - x\|^2 - 4d^2.$$

No limite $n,m \to \infty$ os termos $\|\tilde{y}_n - x\|$ e $\|\tilde{y}_m - x\|$ tendem a d, de modo que $\|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m\|$ tende a zero. Portanto, $(\tilde{y}_n)$ é uma sequência de Cauchy e, como M é uma variedade linear fechada, existe $y \in \mathsf{M}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \tilde{y}_n = y$. Como a norma é uma função contínua do seu argumento,

$$d = \lim_{n\to\infty} \|\tilde{y}_n - x\| = \|\lim_{n\to\infty} \tilde{y}_n - x\| = \|y - x\|.$$

As evidências geométricas são de que se o vetor $z = y - x$ não for ortogonal a M, sua componente perpendicular a M terá norma menor do que a distância d,

uma impossibilidade. A fim de pôr à prova a intuição, suponhamos que exista um vetor $w \in \mathsf{M}$ com $\|w\| = 1$ tal que $\langle w,z\rangle \neq 0$ e façamos $z = z_\perp + z_\|$, com $z_\perp = z - \langle w,z\rangle\, w$ e $z_\| = \langle w,z\rangle\, w$. Temos $z_\perp \perp z_\|$ por construção, de modo que

$$d^2 = \|z\|^2 = \|z_\perp\|^2 + \|z_\|\|^2 = \|z - \langle w,z\rangle\, w\|^2 + |\langle w,z\rangle|^2 .$$

Consequentemente,

$$\|y - \langle w,z\rangle\, w - x\|^2 = \|z - \langle w,z\rangle\, w\|^2 = d^2 - |\langle w,z\rangle|^2 < d^2 ,$$

o que é impossível porque o vetor $y - \langle w,z\rangle\, w$ pertence a M. Portanto, $\langle w,z\rangle =$ 0 para qualquer $w \in \mathsf{M}$ e o vetor $z = y - x$ é ortogonal a M. Finalmente, para demonstrar a unicidade, suponha que exista $\bar{y} \in \mathsf{M}$ tal que $d = \|y - x\| = \|\bar{y} - x\|$. Aplicando a lei do paralelogramo aos vetores $y - x$ e $\bar{y} - x$ resulta

$$\|\bar{y} - y\|^2 = 2\|\bar{y} - x\|^2 + 2\|y - x\|^2 - 4\left\|\frac{\bar{y} + y}{2} - x\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0 \Longrightarrow \|\bar{y} - y\| = 0,$$

donde $\bar{y} = y$. ∎

Teorema 11.12 *Seja* M *uma variedade linear fechada de um espaço de Hilbert* $\mathscr{H}$. *Então podemos escrever* $\mathscr{H} = \mathsf{M} \oplus \mathsf{M}^\perp$, *isto é, qualquer* $x \in \mathscr{H}$ *é da form* $x = y + z$ *com* $y \in \mathsf{M}$ *e* $z \in \mathsf{M}^\perp$. *Além disso, esta decomposição de* x *é única.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, dado $x \in \mathscr{H}$ existe um único ponto $y \in \mathsf{M}$ caracterizado pela máxima proximidade de x e podemos escrever $x = y +$ $(x - y) \equiv y + z$ com $y \in \mathsf{M}$ e $z \in \mathsf{M}^\perp$. Se $x = y' + z'$ é outra decomposição de x com $y' \in \mathsf{M}$ e $z' \in \mathsf{M}^\perp$, temos que $y' - y = z - z'$, de modo que $\tilde{y} = y' - y$ pertence ao mesmo tempo a M e $\mathsf{M}^\perp$. Isto significa que $\tilde{y}$ é ortogonal a si próprio: $\|\tilde{y}\|^2 = \langle \tilde{y},\tilde{y}\rangle = 0$ que implica $\tilde{y} = 0$, ou seja $y' = y$. Como consequência, $z' = z$. ∎

Definição 11.13 *Um* ***funcional linear*** *num espaço de Hilbert* $\mathscr{H}$ *é uma aplicação* $L : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ *tal que*

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L x + \beta L y \tag{11.5}$$

quaisquer que sejam $x,y \in \mathscr{H}$ *e* $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$. *O funcional linear* L *é* ***limitado*** *(ou* ***contínuo****) se existe* $C \geq 0$ *tal que*

$$|Lx| \leq C\|x\| \quad \forall x \in \mathscr{H} . \tag{11.6}$$

*A **norma** de L é o número real não negativo*

$$\|L\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|Lx|}{\|x\|}, \tag{11.7}$$

ou seja, é o menor número $C \geq 0$ *para o qual* (11.6) *é satisfeita.*

Exemplo 11.4.1
Seja $x \in \mathscr{H}$ um vetor fixo e defina L_x por

$$L_x y = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in \mathscr{H}. \tag{11.8}$$

O funcional linear L_x é limitado, pois

$$|L_x y| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

em virtude da desigualdade de Schwarz. Tomando $y = x$ conclui-se que $\|L\| = \|x\|$.

O espaço vetorial formado por todos os funcionais lineares contínuos em $\mathscr{H}$ é chamado de **espaço dual** de $\mathscr{H}$, denotado por $\mathscr{H}'$. Um resultado notável devido a F. Riesz, e conhecido como lema de Riesz, teorema de Riesz ou teorema da representação de Riesz, caracteriza completamente $\mathscr{H}'$: todos os funcionais lineares contínuos num espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ admitem uma representação da forma (11.8).

Teorema 11.14 (Teorema da Representação de Riesz) *A cada funcional linear contínuo L num espaço de Hilbert* $\mathscr{H}$ *corresponde um único elemento* $x_L \in \mathscr{H}$ *tal que*

$$Lx = \langle x_L, x \rangle \quad \forall x \in \mathscr{H}. \tag{11.9}$$

Demonstração. Para que uma representação da forma (11.9) seja possível é necessário que x_L seja ortogonal a todos os vetores x para os quais $Lx = 0$. Isto nos leva a considerar a *nulidade* ou *núcleo* ("kernel", em inglês) de L, definido por

$$\text{Ker}(L) = \{x \in \mathscr{H} \mid Lx = 0\},$$

bem como o seu complemento ortogonal $\text{Ker}(L)^{\perp}$. Claramente, $\text{Ker}(L)$ é uma

variedade linear. Mais ainda, é uma variedade linear fechada porque, se (x_n) é uma sequência de elementos de $\mathrm{Ker}(L)$ que converge para x,

$$Lx = \lim_{n\to\infty} Lx_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \implies x \in \mathrm{Ker}(L),$$

onde usamos a continuidade de L. Se $\mathrm{Ker}(L) = \mathscr{H}$ então $L = 0$ e basta tomar $x_L = 0$. Se $\mathrm{Ker}(L) \neq \mathscr{H}$, existe um vetor não nulo y que não pertence a $\mathrm{Ker}(L)$ e que, pelo Teorema 11.12, pode ser representado de modo único como $y = y_1 + y_2$, onde $y_1 \in \mathrm{Ker}(L)$ e $y_2 \in \mathrm{Ker}(L)^{\perp}$. O vetor y_2 não é nulo senão teríamos $y \in \mathrm{Ker}(L)$. Para qualquer $x \in \mathscr{H}$, note que o vetor $z = (Lx)y_2 - (Ly_2)x$ pertence a $\mathrm{Ker}(L)$, pois

$$Lz = L\big((Lx)y_2 - (Ly_2)x\big) = LxLy_2 - Ly_2Lx = 0.$$

Portanto, como $y_2 \in \mathrm{Ker}(L)^{\perp}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle y_2, z\rangle = \langle y_2, (Lx)y_2 - (Ly_2)x\rangle \\ &= \langle y_2, y_2\rangle Lx - (Ly_2)\langle y_2, x\rangle \implies Lx = \Big\langle \frac{\overline{Ly_2}}{\|y_2\|^2}\, y_2, x\Big\rangle, \end{aligned}$$

donde

$$Lx = \langle x_L, x\rangle \quad \text{com} \quad x_L = \frac{\overline{Ly_2}}{\|y_2\|^2}\, y_2 .$$

Quanto à unicidade, suponha que $Lx = \langle x_L, x\rangle = \langle x'_L, x\rangle$. Neste caso, $\langle x_L - x'_L, x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathscr{H}$. A escolha $x = x_L - x'_L$ dá lugar a $\|x_L - x'_L\|^2 = 0$ que implica $x_L = x'_L$. ∎

Na notação de Dirac, um vetor $x \in \mathscr{H}$ é um *ket* $|x\rangle$ e um funcional linear limitado L é um *bra* $\langle x_L|$. O produto interno $\langle x_L|x\rangle \equiv \langle x_L, x\rangle$ é visto como o resultado da ação de um *bra* (funcional linear contínuo) sobre um *ket* (vetor). O teorema de Riesz estabelece uma correspondência biunívoca entre *bras* e *kets*. Apesar de sua grande praticidade, a notação de Dirac padece de certos defeitos e às vezes obscurece o significado de operações matemáticas básicas, podendo gerar ambiguidades e mal-entendidos (Gieres 2000).

Definição 11.15 *Uma aplicação $s : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ é uma* ***forma sesquilinear*** *se*

$$s(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \overline{\alpha}_1 s(x_1, y) + \overline{\alpha}_2 s(x_2, y),$$

$$s(x,\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 s(x,y_1) + \alpha_2 s(x,y_2)$$

quaisquer que sejam $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{C}$ *e* $x,x_1,x_2,y,y_1,y_2 \in \mathscr{H}$. *A forma sesquilinear* s *é dita **limitada** se existe* $C > 0$ *tal que*

$$|s(x,y)| \leq C\,||x||\,||y|| \tag{11.10}$$

para quaisquer $x,y \in \mathscr{H}$.

O teorema a seguir é uma consequência direta do teorema da representação de Riesz, e sua demonstração é deixada como um exercício (Problema 11.4).

Teorema 11.16 *Se* s *é uma forma sesquilinear limitada, de modo que* (11.10) *se verifica, então existe um único operador linear limitado* A *tal que*

$$s(f,g) = \langle Af,g\rangle .$$

Além disso, $||A|| \leq C$.

11.5 *Princípio da Limitação Uniforme*

Encerremos este capítulo com o teorema de Banach-Steinhaus, um dos pilares da análise funcional. Suponha que (A_n) seja uma sequência de operadores lineares limitados de um espaço de Banach X num espaço normado Y. Pode acontecer de a sequência numérica $(||A_n x||_Y)$ ser limitada para todo $x \in X$. Isto significa apenas que para cada $x \in X$ existe $M_x > 0$ tal que $||A_n x||_Y \leq M_x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Permitindo que x percorra X, o conjunto dos números M_x poderia não ser limitado superiormente. O teorema de Banach-Steinhaus, também conhecido como *princípio da limitação uniforme* ("uniform boundedness principle"), assegura que existe um M finito tal que $M_x \leq M$ para todo $x \in X$ com $\|x\|_X \leq 1$.

Teorema 11.17 (Banach-Steinhaus) *Dados um espaço de Banach* X *e um espaço normado* Y, *seja* (A_n) *uma sequência de operadores lineares em* $\mathscr{L}(X,Y)$ *tal que a sequência numérica* $(||A_n x||_Y)$ *é limitada para cada* $x \in X$. *Então a sequência* $(||A_n x||_Y)$ *é uniformemente limitada na esfera unitária* $S_1 = \{x \in X \mid \|x\|_X \leq 1\}$ *em* X, *isto é, existe* $M > 0$ *tal que*

$$||A_n x||_Y \leq M \;\; \textit{para todo} \;\; n \in \mathbb{N} \;\; \textit{e todo} \;\; x \in X \;\; \textit{com} \;\; \|x\|_X \leq 1 . \tag{11.11}$$

Equivalentemente,

$$\|A_n x\|_Y \leq M\|x\|_X \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e todo } x \in X. \quad 11.12$$

Demonstração. Como já veremos, basta provar que existe $C > 0$ tal que

$$\|A_n x\|_Y \leq C \quad 11.13$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo x pertencente a alguma bola aberta $B(x_0,r) = \{x \in X \mid \|x - x_0\|_X < r\}$. Suponha que isto seja falso, isto é, que em qualquer bola aberta $B(y,s)$ em X não se tem a desigualdade (11.13) satisfeita para todo par (n,x) com $n \in \mathbb{N}$ e $x \in B(y,s)$. Neste caso, em toda bola aberta existe x_1 tal que $\|A_{n_1} x_1\|_Y > 1$ para algum $n_1 \in \mathbb{N}$. Como a função $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|A_{n_1} x\|_Y$ é contínua, existe uma bola $B^{(1)}$ com centro em x_1 e raio menor que 1 tal que

$$\|A_{n_1} x\|_Y > 1 \text{ para todo } x \in B^{(1)}.$$

Como $(\|A_n x\|_Y)$ não é uniformemente limitada em $B^{(1)}$, a repetição do argumento anterior leva a concluir que existem $x_2 \in B^{(1)}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$, com $n_2 > n_1$, tais que $\|A_{n_2} x_2\|_Y > 2$. Por continuidade, existe uma bola $B^{(2)} \subset B^{(1)}$ com centro em x_2 e raio menor que $1/2$ tal que

$$\|A_{n_2} x\|_Y > 2 \text{ para todo } x \in B^{(2)}.$$

Prosseguindo desta maneira, constrói-se uma sequência $B^{(1)} \supset B^{(2)} \supset B^{(3)} \supset \cdots$ de bolas encaixadas tais que

$$\|A_{n_k} x\|_Y > k \text{ para todo } x \in B^{(k)},$$

onde $B^{(k)}$ é uma bola centrada em x_k com raio menor que $1/k$. Por construção, a sequência (x_n) é tal que, para $n > m$,

$$\|x_n - x_m\|_X \leq \frac{1}{m},$$

ou seja, (x_n) é uma sequência de Cauchy. Portanto, (x_n) converge para algum elemento $\tilde{x} \in X$ que é ponto interior de todas as bolas, isto é,

$$\tilde{x} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B^{(n)}.$$

Isto nos leva a concluir que

$$||A_{n_k}\tilde{x}||_Y > k \ \text{ para todo } \ k \in \mathbb{N}.$$

Segue-se que $\left(||A_{n_k}\tilde{x}||_Y\right)_{k=1}^{\infty}$ não é uma sequência limitada, o que nega a hipótese do teorema. Pela contrapositiva, fica estabelecido que a sequência $(||A_n x||_Y)$ é uniformemente limitada em alguma bola $B(x_0,r) = \{x \in X \,|\, \|x - x_0\|_X < r\}$, isto é,

$$||A_n x||_Y \leq C, \quad x \in B(x_0,r), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mas se y pertence à esfera unitária S_1, isto é, se $\|y\|_X \leq 1$, o vetor $x = x_0 + \frac{r}{2}y$ pertence a $B(x_0,r)$. Assim, explorando a linearidade de A_n, podemos escrever

$$A_n y = \frac{2}{r}\left[A_n\left(x_0 + \frac{r}{2}y\right) - A_n x_0\right]$$

donde, tendo em vista que $x_0 \in B(x_0,r)$,

$$||A_n y||_Y \leq \frac{2}{r}\left[||A_n x||_Y + ||A_n x_0||_Y\right] \leq \frac{4C}{r} = M$$

para todo $y \in X$ com $\|y\|_X \leq 1$, o que completa a demonstração. ∎

Observação. Este princípio de limitação uniforme permanece válido se, em vez de uma sequência de operadores lineares limitados, tivermos uma coleção de cardinalidade arbitrária T_σ composta por operadores limitados de um espaço de Banach X num espaço normado Y com $\sup_\sigma \|T_\sigma x\|_Y < \infty$ para cada $x \in X$ (Bachman & Narici 2000, Seção 15.2).

O teorema de Banach-Steinhaus tem importantes consequências para a mecânica quântica, como veremos no próximo capítulo. Antes, porém, só para aquecer os músculos, vejamos uma aplicação simples deste teorema a sequências fracamente convergentes em espaços de Hilbert.

Proposição 11.18 *Seja* (x_n) *uma sequência fracamente convergente num espaço de Hilbert* $\mathscr{H}$*. Então* (x_n) *é limitada, isto é,* $\|x_n\| \leq M$ *para algum* $M > 0$.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência fracamente convergente em $\mathscr{H}$ e considere os funcionais lineares L_n definidos por $L_n y = \langle x_n, y\rangle$ para qualquer $y \in \mathscr{H}$. A sequência $(L_n y)$ é limitada porque, por hipótese, é uma sequência

convergente de números complexos: $|L_n y| \le M_y$. Pelo teorema de Banach-Steinhaus, existe $M > 0$ tal que $|L_n y| \le M\|y\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $y \in \mathscr{H}$. Tomando $y = x_n$ resulta $\|x_n\|^2 = |L_n x_n| \le M\|x_n\|$, donde $\|x_n\| \le M$. ∎

Leituras Adicionais Selecionadas[1]

- • Akhiezer, N. I. e Glazman, I. M. 1963 *Theory of Linear Operators in Hilbert Space.*
- Kreyszig, E. 1978 *Introductory Functional Analysis With Applications.*
- • E. Prugovečki, E. 1981 *Quantum Mechanics in Hilbert Space.*
- Teschl, G. 2009 *Mathematical Methods in Quantum Mechanics.*

Problemas

11.1. Se A é um operador linear num espaço vetorial arbitrário e A^{-1} existe, prove que A^{-1} é um operador linear.

11.2. Seja A um operador linear definido em todo o espaço de Hilbert complexo $\mathscr{H}$. Prove que se $Ax \perp x$ para todo $x \in \mathscr{H}$, então $A = 0$. Mostre que $Ax \perp x$ não implica $A = 0$ num espaço de Hilbert real. Sugestão: considere um operador de rotação num plano.

11.3. Sejam X e Y espaços normados. Prove que um operador linear $A : X \to Y$ é limitado se e somente se mapeia conjuntos limitados de X em conjuntos limitados de Y.

11.4. Prove o Teorema 11.16.

11.5. Considere a forma sesquilinear

$$B(f,g) = \int_0^1 \left(\int_0^x \overline{f(t)}\, dt\right)\left(\int_0^x g(t)\, dt\right) dx$$

em $L^2(0,1)$. Prove que B é limitada e encontre o operador linear associado A. Sugestão: integração por partes.

1. A lista completa de referências, com plenos detalhes bibliográficos, encontra-se na Bibliografia no fim do livro. O símbolo • destaca obras cuja leitura é altamente recomendada.

11.6. Seja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

uma série de potências com raio de convergência $R > 0$. Seja A um operador linear limitado num espaço de Banach X com $||A|| < R$. (a) Prove que

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$$

existe e define um operador linear limitado com $||f(A)|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, ||A||^n$. Indicação: basta mostrar que para todo $x \in X$ a sequência de somas parciais $\left(f_n(A)x\right)$ com $f_n(A)x = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k x$ é uma sequência de Cauchy. (b) Quando $a_n = 1$ para todo n e $||A|| < 1$, a série correspondente

$$f(A) = I + A + A^2 + A^3 + \ldots$$

é conhecida como **série de Neumann.** Prove que, neste caso, a série de Neumann representa o operador $(I - A)^{-1}$. Prove, ainda, que $||(I - A)^{-1}|| \leq (1 - ||A||)^{-1}$.

11.7. Seja $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma base ortornormal num espaço de Hilbert e seja A o operador linear definido por $Ae_n = e_n / n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (a) Prove que A é limitado e determine sua norma. (b) Mostre que A^{-1} existe mas não é limitado e especifique o seu domínio. (c) Prove que o operador A não é sobrejetivo.

11.8. Seja A um operador linear positivo, isto é, $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in D(A)$. Prove que $(A - \lambda I)^{-1}$ existe se $\lambda < 0$.

11.9. Seja $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números complexos e denote por c_0 o espaço das sequências que convergem para zero, isto é,

$$c_0 = \left\{a \mid \lim_{n \to \infty} a_n = 0\right\}.$$

(a) Prove que c_0 é um espaço de Banach com a norma do supremo:

$$||a|| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

(b) Suponha que $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$ e considere o funcional linear $\Lambda : c_0 \to \mathbb{C}$ definido por

$$\Lambda a = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n .$$

Prove que Λ é limitado e $||\Lambda|| = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|$. Sugestão: prove uma desigualdade para a norma de Λ e, em seguida, com $\lambda_n = |\lambda_n| e^{i\theta_n}$, considere as sequências $a^{(k)} = \{e^{-i\theta_1}, e^{-i\theta_2}, \ldots, e^{-i\theta_k}, 0,0,0,\ldots\}$.

11.10. Seja $\mathscr{L}(X,Y)$ o espaço das aplicações lineares limitadas de X em Y com a norma (11.3). Prove que se Y é um espaço de Banach, então $\mathscr{L}(X,Y)$ é um espaço de Banach.

11.11 Sejam L_1 e L_2 funcionais lineares definidos em $L^2(0,1)$ por

$$L_1 f = \int_0^1 f(\sqrt{t})\, dt, \quad L_2 f = \int_0^1 f(t^2)\, dt.$$

(a) Ambos são limitados? Se algum deles for limitado, determine sua norma.
(b) Estes funcionais lineares são limitados quando definidos em $C[0,1]$ com a norma do supremo?

11.12. Considere o operador linear definido em $L^2(0,1)$ por

$$(Af)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)\, dt, \quad 0 < x \leq 1.$$

Este operador é limitado?

11.13. Prove que o operador diferencial $-i d/dx$ em $L^2(0,1)$ não é limitado.

11.14. Prove que qualquer aplicação linear entre dois espaços vetoriais de dimensão *finita* é limitada. Informação útil: num espaço vetorial de dimensão finita todas as normas são equivalentes.

11.15. Seja $\{e_n\}$ uma base ortonormal num espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. (a) Dada uma sequência de números complexos (λ_n), seja A o operador linear em $\mathscr{H}$ definido por

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle e_n, x \rangle e_n .$$

Prove que A é limitado se e somente se a sequência (λ_n) é limitada. (b) Determine a norma de A no caso em que a sequência (λ_n) é limitada.

11.16. Prove que se M é uma variedade linear fechada de um espaço de Hilbert se e somente se $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

11.17. Prove que a variedade linear

$$M = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} = 0 \right\}$$

é fechada em l^2. Sugestão: note que a condição sobre o vetor x pode ser escrita como um produto interno.

11.18. Seja X um espaço de Banach e $A : X \to Y$ um operador linear limitado. Suponha que existe $m > 0$ tal que $\|Ax\|_Y \geq m\|x\|_X$ para todo $x \in X$. Prove que $\text{Ran}(A)$ é uma variedade linear fechada de Y.

11.19. Prove que, num espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, as três noções de convergência de operadores — fraca, forte e uniforme — coincidem.

11.20. Seja $A \in \mathscr{L}(X)$ uma bijeção. Prove que

$$\|A^{-1}\|^{-1} = \inf_{f \in X, \|f\|=1} \|Af\|.$$

Comentários: (i) Se o segundo membro da igualdade acima for nulo, entende-se que $\|A^{-1}\| = \infty$, isto é, A^{-1} não é limitado. (ii) Se X é um espaço de Banach, o teorema da aplicação aberta (*open mapping theorem*) garante que A^{-1} é limitado sempre que A é uma bijeção limitada.

11.21. (a) Mostre que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ quaisquer que sejam $A, B \in \mathscr{L}(X)$. (b) Prove que a multiplicação de operadores limitados é contínua relativamente à convergência uniforme: de $A_n \to A$ e $B_n \to B$ resulta que $A_nB_n \to AB$ no sentido de convergência uniforme.

11.22. Seja $A \in \mathscr{L}(X,Y)$. Prove que $\text{Ker}(A)$ é fechado.

11.23. Dada a função contínua $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$, considere o operador integral

$$(\mathbb{K}f)(x) = \int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, dy.$$

Prove que $\mathbb{K}$ é limitado tanto em $X = C[0,1]$ (com a norma do supremo) quanto em $X = L^2(0,1)$.

11.24. Seja $A : X \to Y$ uma aplicação linear. (a) Se A^{-1} existe, prove que o conjunto de vetores $\{Ax_1, \ldots, Ax_n\}$ é linearmente independente em Y se o conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é linearmente independente em X. (b) Se $\dim X = \dim Y = n < \infty$, prove que A^{-1} existe se e somente se $\mathrm{Ran}(A) = Y$. (c) Seja X o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e defina $A : X \to X$ por $(Ax)(t) = x'(t)$. Prove que $\mathrm{Ran}(A) = X$ mas A^{-1} não existe.

11.25. Considere os operadores S e T definidos em $C[0,1]$ por

$$(Sx)(t) = t\int_0^1 x(s)\, ds, \quad (Tx)(t) = tx(t).$$

Estes operadores comutam? Encontre $\|S\|$, $\|T\|$, $\|ST\|$ e $\|TS\|$.

11.26. Determine a norma do funcional linear L definido em $L^2(\mathbb{R})$ por

$$Lf = \int_{-\infty}^0 e^x f(x)\, dx - \int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx.$$

11.27. Seja $T : C[0,1] \to C[0,1]$ o operador definido por $(Tf)(x) = \int_0^1 e^{xt} f(t) dt$. Prove que T é limitado e $\|T\| = e - 1$.

11.28. Seja g um elemento não nulo de $L^2(0,1)$ e A o operador linear em $L^2(0,1)$ definido por

$$Af = g\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{3/4}}\, dx.$$

(a) Especifique o domínio de A. Encontre um elemento $f \in L^2(0,1)$ que não pertença ao domínio de A. (b) Prove que A não é limitado.

11.29. (a) Sejam $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert e $a, b \in \mathscr{H} \setminus \{0\}$ com $a \perp b$. Seja $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ o operador definido por

$$Tx = \langle b, x\rangle a + \langle a, x\rangle b.$$

Calcule $||T||$. (b) Calcule $||T||$ para o operador $T : L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$ definido por

$$(Tf)(x) = \operatorname{sen} x \int_0^{\pi} \cos t\, f(t)\, dt + \cos x \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\, f(t)\, dt.$$

11.30. A variedade linear M em $L^2(-1,1)$ definida por

$$\mathsf{M} = \left\{ f \in L^2(-1,1) \,|\, \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0 \right\}$$

é fechada? Determine $\mathsf{M}^{\perp}$.

12

Operadores Simétricos, Autoadjuntos e Unitários

O estudo detalhado dos operadores autoadjuntos e unitários justifica-se pelo papel crucial que desempenham na mecânica quântica. Começaremos discutindo as principais propriedades dos operadores simétricos, pois estes servem de ponto de partida para a construção dos operadores autoadjuntos.

12.1 *Operadores Simétricos*

Os operadores simétricos são conhecidos pelos físicos como operadores hermitianos.

Definição 12.1 *Um operador linear A é* ***simétrico*** *se* $\mathrm{D}(A)$ *é denso em* $\mathscr{H}$ *e*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad \forall\, x, y \in \mathrm{D}(A). \tag{12.1}$$

Exemplo 12.1.1
O operador de posição Q em $L^2(\mathbb{R})$, introduzido no Exercício 11.2.4, é simétrico, pois

$$\langle Qf, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{xf(x)}\, g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, xg(x)dx = \langle f, Qg\rangle$$

quaisquer que sejam $f, g \in \mathrm{D}(Q)$. Como veremos no Exemplo 12.4.1, $\mathrm{D}(Q)$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$.

Exemplo 12.1.2

O operador de momento linear $P = -id/dx$ em $L^2(\mathbb{R})$ com domínio $D(P) = \mathscr{S}$, onde $\mathscr{S}$ é o espaço de Schwartz das funções infinitamente diferenciáveis de decréscimo rápido, é simétrico. Com efeito, se $f,g \in D(P)$, uma integração por partes fornece

$$\langle Pf,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{-if'(x)}\, g(x)dx = i\overline{f(x)}g(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - i\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, g'(x)dx = \langle f,Pg\rangle$$

porque $f(x)$ e $g(x)$ tendem a zero para $x \to \pm\infty$. Pode-se provar que o domínio $D(P) = \mathscr{S}$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$.

Definição 12.2 *Um elemento $x \neq 0$ é um* ***autovetor*** *do operador linear A com* ***autovalor*** *$\lambda \in \mathbb{C}$ se $x \in D(A)$ e*

$$Ax = \lambda x. \qquad 12.2$$

Exercício 12.1.1

Dado um operador simétrico, prove que: (a) seus autovalores são necessariamente reais; (b) seus autovetores com autovalores distintos são ortogonais.

Conforme acabamos de ver, os operadores Q e P em $L^2(\mathbb{R})$ são simétricos. Grandes dificuldades seriam evitadas caso seus respectivos domínios pudessem ser estendidos a todo o espaço de Hilbert sem perda da propriedade de simetria. Infelizmente, em consequência de não serem operadores limitados, eles não podem ser definidos sobre todo o espaço de Hilbert.

Teorema 12.3 (Hellinger-Toeplitz) *Um operador simétrico definido sobre todos os elementos de um espaço de Hilbert é necessariamente limitado.*

Demonstração. Seja A simétrico e definido sobre todo o espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Suponhamos que A não seja limitado. Então existe uma sequência (y_n) de elementos de $\mathscr{H}$ com $\|y_n\| = 1$ e $\|Ay_n\| \to \infty$. Com efeito, $\exists y_1 \in \mathscr{H}$ com $\|y_1\| = 1$ e $\|Ay_1\| > 1$, senão A seria limitado com $\|A\| \leq 1$; $\exists y_2 \in \mathscr{H}$ com $\|y_2\| = 1$ e $\|Ay_2\| > 2$, senão A seria limitado com $\|A\| \leq 2$; e assim por diante. Defina a sequência de funcionais lineares (L_n) por

$$L_n x = \langle Ay_n, x \rangle = \langle y_n, Ax \rangle .$$

Por um lado,

$$|L_n x| = |\langle Ay_n, x \rangle| \leq \|Ay_n\| \, \|x\| ,$$

de modo que cada funcional linear L_n é limitado. Por outro lado,

$$|L_n x| = |\langle y_n, Ax \rangle| \leq \|y_n\| \, \|Ax\| = \|Ax\| ,$$

de modo que a sequência numérica $(|L_n x|)$ é limitada para cada $x \in \mathscr{H}$. Pelo teorema de Banach-Steinhaus, existe $M \geq 0$ tal que

$$|L_n x| \leq M \|x\| \quad \text{para todo} \quad x \in \mathscr{H} .$$

Em particular, para $x = Ay_n$, temos

$$\|Ay_n\|^2 = |L_n(Ay_n)| \leq M \|Ay_n\|$$

que implica

$$\|Ay_n\| \leq M ,$$

em contradição com $\|Ay_n\| \to \infty$ para $n \to \infty$. Isto completa a demonstração. ∎

Este teorema é um fonte de dores de cabeça na mecânica quântica. Os operadores associados a grandezas observáveis devem ser simétricos[1] para que seus autovalores sejam reais. Como praticamente todos os operadores da mecânica quântica são ilimitados, o teorema de Hellinger-Toeplitz mostra que eles não podem ser definidos sobre todo o espaço de Hilbert. Torna-se inevitável especificar o domínio de cada operador ilimitado que ocorre na mecânica quântica. O máximo que se pode exigir é que cada operador simétrico ilimitado seja definido num domínio denso de $\mathscr{H}$. Diremos, neste caso, tratar-se de um operador **densamente definido**. Problemas com domínios podem dificultar operações tão simples quanto soma ou produto de operadores. Por exemplo, se $C = A + B$, então $\mathrm{D}(C) = \mathrm{D}(A) \cap \mathrm{D}(B)$, ao passo que $C = AB$ só está definido no domínio $\mathrm{D}(C) = \mathrm{D}(A) \cap \mathrm{Ran}(B)$. Mesmo que A e B

1. Veremos que eles precisam ser mais do que simétricos, eles têm que ser autoadjuntos.

sejam densamente definidos, D(C) não é necessariamente denso e, em certos casos, pode até reduzir-se ao vetor nulo (Perlman & Troup 1969). A situação torna-se mais favorável em dois casos: (a) quando existe um domínio denso comum aos dois operadores e que permanece invariante sob a ação de ambos os operadores; (b) quando um dos operadores é limitado e, portanto, está definido sobre todo o espaço de Hilbert. Neste último caso, se B é limitado então $C = A + B$ está definido em D(A), que é denso, enquanto $C = AB$ só está definido no domínio $D(A) \cap \mathrm{Ran}(B)$, que não é necessariamente denso. Quanto ao primeiro caso, em $L^2(\mathbb{R})$, por exemplo, o espaço de Schwartz $\mathscr{S}$ das funções infinitamente diferenciáveis de decréscimo rápido forma um domínio denso e invariante para os operadores Q e P. Qualquer potência de Q ou P aplicada a um elemento de $\mathscr{S}$ é outro elemento de $\mathscr{S}$. Em particular, se $V(Q)$ é um potencial polinomial o operador hamiltoniano $H = P^2/2m + V(Q)$ está bem defindo no domínio $\mathscr{S}$.

Em face de sua importância, encerremos esta seção com uma caracterização dos conjuntos densos que nos será muito útil no futuro.

Teorema 12.4 *Um conjunto de vetores $S \subset \mathscr{H}$ é denso no espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ se e somente se o único elemento de $\mathscr{H}$ que é ortogonal a todos os elementos de S é o vetor nulo.*

Demonstração. Se S é denso em $\mathscr{H}$ e $x \in \mathscr{H}$ é ortogonal a todos os elementos de S, tomando uma sequência (x_n) de elementos de S que converge para x deduzimos

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

donde $x = 0$. Reciprocamente, suponha que o vetor nulo é o único vetor ortogonal a todos os elementos de S. Como $S \subset \overline{S}$, se $x \perp \overline{S}$ segue-se que $x \perp S$, donde $x = 0$. Portanto, o complemento ortogonal se $\overline{S}$ é composto somente pelo vetor nulo: $\overline{S}^{\perp} = \{0\}$. De acordo com o Teorema 11.12, $\mathscr{H} = \overline{S} \oplus \overline{S}^{\perp} = \overline{S}$. Portanto, S é denso. ∎

12.2 *Adjunto de um Operador Linear*

Operadores apenas simétricos não satisfazem todos os requisitos para representar uma quantidade mensurável na mecânica quântica. A exigência, matematicamente impossível, de que exista uma base ortonormal de $\mathscr{H}$ constituída

por autovetores de qualquer operador A associado a uma grandeza mensurável é concretizada de modo matematicamente preciso na representação espectral de A garantida pelo teorema espectral. Mas para isto, como veremos, não basta ser simétrico: o teorema espectral só se aplica se A é igual ao seu adjunto.

Definição 12.5 *Dado um operador linear A densamente definido num espaço de Hilbert* $\mathscr{H}$, *seja* $\mathrm{D}(A^*)$ *o conjunto dos vetores* $y \in \mathscr{H}$ *para os quais existe* $y_* \in \mathscr{H}$ *tal que*

$$\langle y_*, x\rangle = \langle y, Ax\rangle \quad \forall x \in \mathrm{D}(A). \tag{12.3}$$

Para cada $y \in \mathrm{D}(A^*)$ *definimos* $A^* y = y_*$. *O operador linear* A^* *é chamado de* ***adjunto*** *de A.*

De acordo com esta definição, o operador adjunto é tal que

$$\langle A^* y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle \quad \forall x \in \mathrm{D}(A), \forall y \in \mathrm{D}(A^*). \tag{12.4}$$

O domínio de A^* não é vazio porque, na pior das hipóteses, o vetor nulo pertence a $\mathrm{D}(A^*)$. Além disso, A^* está bem definido porque, se existe, y_* é univocamente determinado por y. De fato, se y_* e $\tilde{y}_*$ correspondem ao mesmo y, temos

$$\langle y_* - \tilde{y}_*, x\rangle = \langle y, Ax\rangle - \langle y, Ax\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathrm{D}(A),$$

donde, como $\mathrm{D}(A)$ é denso, $y_* = \tilde{y}_*$ em virtude do Teorema 12.4. Por fim, A^* é efetivamente um operador linear: se $y = \alpha_1 y^{(1)} + \alpha_2 y^{(2)}$ com $y^{(1)}, y^{(2)} \in \mathrm{D}(A^*)$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned}\langle y, Ax\rangle &= \overline{\alpha}_1 \langle y^{(1)}, Ax\rangle + \overline{\alpha}_2 \langle y^{(2)}, Ax\rangle \\ &= \overline{\alpha}_1 \langle y_*^{(1)}, x\rangle + \overline{\alpha}_2 \langle y_*^{(2)}, x\rangle = \langle \alpha_1 y_*^{(1)} + \alpha_2 y_*^{(2)}, x\rangle\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathrm{D}(A)$, donde

$$A^*(\alpha_1 y^{(1)} + \alpha_2 y^{(2)}) = A^* y = \alpha_1 y_*^{(1)} + \alpha_2 y_*^{(2)} = \alpha_1 A^* y^{(1)} + \alpha_2 A^* y^{(2)}.$$

Deve-se ressaltar que o domínio de A^* não é necessariamente denso e, em casos extremos, é possível que se tenha $\mathrm{D}(A^*) = \{0\}$. Por outro lado, como mostra o exercício que se segue, o adjunto de A só existe se A é um operador linear com domínio denso.

Exercício 12.2.1
Se D(A) não é denso, o operador linear A não possui um adjunto. Prove isto mostrando que a equação (12.3) não associa a cada y um único y_*.

Exemplo 12.2.1
Em l^2, considere o operador de translação T, com D(T) $= l^2$, definido por

$$Tx \equiv T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), \quad x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) \in l^2.$$

Com $y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots)$ e $y_* = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots)$, devemos ter

$$\langle y_*, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \quad \forall x \in l^2,$$

isto é,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \overline{\gamma}_k \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\beta}_{k+1} \alpha_k.$$

Desta equação, tomando $\alpha_n = 1$ e $\alpha_k = 0$ para $k \neq n$, resulta

$$\begin{aligned}\gamma_n = \beta_{n+1} \implies T^*(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots) \\ = T^* y = y_* = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots) = (\beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots),\end{aligned}$$

ficando, assim, determinado o adjunto de T, com D(T^*) $= l^2$.

Um operador simétrico tem uma estreita relação com o seu adjunto. Se A é um operador simétrico e $y \in$ D(A), tem-se $\langle Ay, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ para todo $x \in$ D(A). Logo, $y \in$ D(A^*) e $A^* y = Ay$. Consequentemente, D(A) $\subset$ D(A^*) e $A^* y = Ay$ para todo $y \in$ D(A), de modo que A^* é uma extensão de A: tem-se $A \subset A^*$ sempre que A é simétrico.

Definição 12.6 *Um operador A (não necessariamente linear) é dito* ***fechado*** *se goza da seguinte propriedade: se a sequência* $x_1, x_2, x_3, \ldots \in$ D(A) *converge para* $x \in \mathscr{H}$ *e se a sequência de imagens* $Ax_1, Ax_2, Ax_3, \ldots$ *converge para* $y \in \mathscr{H}$*, então* $x \in$ D(A) *e* $Ax = y$.

A diferença entre operador fechado e operador contínuo é que, para este último, a convergência de $(x_n) \in$ D(A) para um elemento $x \in$ D(A) *implica* a

convergência da sequência (Ax_n); se A é apenas fechado, a convergência de (x_n) não implica a convergência de (Ax_n).

Teorema 12.7 *O adjunto A^* de um operador linear A é fechado.*

Demonstração. Seja $(y_n) \in D(A^*)$ uma sequência convergente para $y \in \mathscr{H}$ e suponha que a sequência $(A^* y_n)$ converge para $z \in \mathscr{H}$. Então, para todo $x \in D(A)$,

$$\langle z, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle A^* y_n, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y_n, Ax\rangle = \langle y, Ax\rangle ,$$

isto é, $y \in D(A^*)$ e $A^* y = z$. ▮

Se um operador A não é fechado, pode-se tentar estender o seu domínio de modo a obter uma extensão fechada $\bar{A}$ da seguinte maneira: se $x \notin D(A)$ mas existe uma sequência $(x_n) \in D(A)$ tal que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$, defina $\bar{A}x = y$. Para que isto funcione é preciso que, dada qualquer outra sequência (x'_n) em $D(A)$ tal que $x'_n \to x$, tenha-se $Ax'_n = y$. Para operadores lineares, é fácil verificar que a seguinte condição é equivalente: sempre que $(x_n) \in D(A)$ satisfaz $x_n \to 0$ e $Ax_n \to z$, tem-se $z = 0$. Um operador linear A com esta propriedade é dito **fechável**, pois admite a extensão fechada $\bar{A}$, chamada *fecho* de A, construída pelo método indicado.

Frequentemente é necessário considerar extensões de operadores. Um resultado simples, porém importante, explicita a relação entre o adjunto de uma extensão do operador e o adjunto do operador.

Teorema 12.8 *Se $A \subset B$ então $B^* \subset A^*$.*

Demonstração. Seja B uma extensão de A. Se $x \in D(B^*)$,

$$\langle B^* x, y\rangle = \langle x, By\rangle \ \ \forall y \in D(B) \implies \langle B^* x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \ \ \forall y \in D(A).$$

Por conseguinte, $x \in D(A^*)$ e $A^* x = B^* x$. ▮

Em palavras: se o domínio de um operador é ampliado, o domínio do adjunto do operador é reduzido.

Teorema 12.9 *Todo operador simétrico possui uma extensão simétrica fechada, a saber: A^{**}.*

Demonstração. É evidente que A^{**} é fechado, pois é o adjunto de A^*. Verifiquemos que A^{**} é extensão de A: se $x \in D(A)$, para todo $y \in D(A^*)$ temos $\langle x, A^* y \rangle = \langle Ax, y \rangle$, o que mostra que $x \in D(A^{**})$ e $A^{**}x = Ax$. Resta provar que A^{**} é simétrico. Se A simétrico, $A \subset A^*$. Recorrendo ao Teorema 12.8 deduzimos, sucessivamente, $A^{**} \subset A^*$ e $A^{**} \subset A^{***}$, o que nos permite escrever

$$\langle A^{**}x, y \rangle = \langle A^{***}x, y \rangle = \langle x, A^{**}y \rangle$$

quaisquer que sejam $x, y \in D(A^{**})$. ∎

Em virtude deste teorema, todo operador simétrico pode ser suposto fechado.

Exercício 12.2.2
Prove que se A é um operador fechado e possui inverso, então A^{-1} também é fechado.

Teorema 12.10 *Se A é um operador limitado definido em todo o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então A^* é um operador limitado definido em todo o espaço de Hilbert e $\|A^*\| = \|A\|$.*

Demonstração. Defina o funcional linear L por

$$Lx = \langle y, Ax \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

onde $y \in \mathcal{H}$ é um elemento fixo. Como

$$|Lx| \leq \|y\| \, \|Ax\| \leq \|y\| \, \|A\| \, \|x\|,$$

L é limitado. Pelo teorema da representação de Riesz, existe um único $y_* \in \mathcal{H}$ tal que $Lx = \langle y_*, x \rangle$, ou seja,

$$\langle y_*, x \rangle = \langle y, Ax \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Portanto, $y \in D(A^*)$ e $A^* y = y_*$. Como $y \in \mathcal{H}$ é arbitrário, $D(A^*) = \mathcal{H}$. Para provar que A^* é limitado, considere

$$|\langle A^* y, x \rangle| = |\langle y, Ax \rangle| \leq \|y\| \, \|A\| \, \|x\|$$

e escolha $x = A^* y$ para obter

$$\|A^* y\|^2 \leq \|y\| \, \|A\| \, \|A^* y\|.$$

Assim,

$$\|A^* y\| \leq \|A\| \, \|y\|,$$

o que prova que A^* é limitado e $\|A^*\| \leq \|A\|$. Invertendo os papéis de A e A^* e repetindo o argumento anterior resulta $\|A\| \leq \|A^*\|$. Portanto, $\|A^*\| = \|A\|$. ∎

Exercício 12.2.3
Se A e B são operadores limitados definidos em todo o espaço de Hilbert, prove que: (i) $(A+B)^* = A^* + B^*$; (ii) $(AB)^* = B^* A^*$; (iii) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$; (iv) $A^{**} = A$.

Alerta. Ao contrário do que quase todos os textos de mecânica quântica sugerem, somente a propriedade (iii) do Exercício 12.2.3 vale para operadores arbitrários. As demais valem irrestritamente apenas para operadores *limitados* e são, em geral, falsas para operadores ilimitados devido a problemas associados à especificação dos domínios dos operadores envolvidos.

Teorema 12.11 *Se A é um operador linear limitado, então $\|A^* A\| = \|A\|^2$. Se A possui um inverso A^{-1} limitado, então A^* possui um inverso limitado e $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Demonstração. Lembramos que operadores limitados sempre podem ser considerados definidos sobre todo o espaço de Hilbert. De $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ deduz-se imediatamente (Exercício 12.2.3)

$$(A^{-1})^* A^* = A^* (A^{-1})^* = I^* = I,$$

ou seja, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Quanto à primeira parte do teorema, note que

$$\|A^* A x\| \leq \|A^*\| \, \|A\| \, \|x\| = \|A\|^2 \, \|x\|,$$

donde $\|A^* A\| \leq \|A\|^2$, onde usamos o Teorema 12.10. Por outro lado,

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^* A x, x \rangle \leq \|A^* A\| \, \|x\|,$$

donde

$$\|A^*A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A^*Ax\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \left(\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|\right)^2 = \|A\|^2,$$

o que completa a demonstração. ∎

12.3 *Operadores Isométricos e Unitários*

Os operadores isométricos e os operadores unitários, especialmente estes últimos, desempenham um papel fundamental na mecânica quântica.

Definição 12.12 *Um operador linear U de um espaço de Hilbert $\mathscr{H}_1$ no espaço de Hilbert $\mathscr{H}_2$ (com produtos internos $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$, respectivamente) é* ***isométrico*** *se* $D(U) = \mathscr{H}_1$ *e*

$$\langle Ux, Uy\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1 \quad \forall x, y \in \mathscr{H}_1. \tag{12.5}$$

Se $\text{Ran}(U) = \mathscr{H}_2$, *de modo que U é uma bijeção, diz-se que U é* ***unitário.***

Note que se $U : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ é unitário, então $U^{-1} : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_1$ também é unitário e tem-se $\langle U^{-1}x, U^{-1}y\rangle_1 = \langle x, y\rangle_2$ para todos os $x, y \in \mathscr{H}_2$.

Exemplo 12.3.1

O operador $T : l^2 \to l^2$ introduzido no Exemplo 12.2.1 é isométrico porque $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ para todos os $x, y \in l^2$. Nenhum vetor de l^2 com a primeira componente diferente de zero pertence a $\text{Ran}(T)$, logo T não é unitário.

Exercício 12.3.1

Mostre que $U : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ é isométrico se e somente se $\|Ux\|_1 = \|x\|_2$ para todo $x \in \mathscr{H}_1$. Sugestão: calcule $\langle U(x+y), U(x+y)\rangle$ e $\langle U(x+iy), U(x+iy)\rangle$.

Teorema 12.13 *Um operador linear $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ definido em todo o espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ é unitário se e somente se*

$$U^*U = UU^* = I, \tag{12.6}$$

isto é, se e somente se $U^{-1} = U^*$.

Demonstração. Se U é unitário, de $\langle x,y\rangle = \langle Ux,Uy\rangle$ e $\mathrm{Ran}(U) = \mathcal{H}$ infere-se que $D(U^*) = \mathcal{H}$ e $U^*Ux = x$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Além disso, de $\mathrm{Ran}(U) = \mathcal{H}$ deduz-se que em

$$\langle Ux, y\rangle = \langle x, U^* y\rangle = \langle Ux, UU^* y\rangle$$

Ux percorre todo o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, o que exige $UU^* y = y$ para todo $y \in \mathcal{H}$. Portanto, a equação (12.6) é satisfeita. Reciprocamente, se (12.6) é válida, temos $U^{-1} = U^*$ donde $\mathrm{Ran}(U) = D(U^{-1}) = D(U^*) = \mathcal{H}$. Além disso, $\langle Ux,Uy\rangle = \langle U^*Ux,y\rangle = \langle x,y\rangle$, de modo que o operador U é unitário. ∎

Exemplo 12.3.2
Seja T_a o operador de translação definido em $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ por

$$(T_a f)(x) = f(x-a) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

É claro que $\mathrm{Ran}(T_a) = \mathcal{H}$, pois se $f \in \mathcal{H}$ então f_a definido por $f_a(x) = f(x+a)$ é um elemento de $\mathcal{H}$ tal que $T_a f_a = f$. Além disso,

$$\langle T_a f, T_a g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x-a)}\, g(x-a)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx = \langle f, g\rangle,$$

de modo que T_a é unitário. Para determinar T^*, considere

$$\langle g_*, f\rangle = \langle g, T_a f\rangle \quad \forall f \in D(T_a) = \mathcal{H}.$$

Isto equivale a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g_*(x)}\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\, f(x-a)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x+a)}\, f(x)\, dx,$$

donde, para todo $f \in \mathcal{H}$,

$$\langle g_* - g_a, f\rangle = 0 \;\text{ com }\; g_a(x) = g(x+a).$$

Isto implica que $g_* = g_a$, de modo que

$$(T_a^* g)(x) = g_*(x) = g(x+a) \quad \forall g \in \mathcal{H}.$$

Verifica-se imediatamente que $T_a^* T_a = T_a T_a^* = I$.

Num espaço vetorial de dimensão finita não há distinção entre operadores isométricos e unitários porque a equação $U^*U = I$ implica $UU^* = I$ e vice--versa. Isto não é verdade num espaço de Hilbert de dimensão infinita, e pode-se ter $U^*U = I$ mas $UU^* \neq I$. Se $U^*U = I$ o operador U é isométrico, e em espaços de Hilbert de dimensão infinita há operadores isométricos que não são unitários. Exemplos de relevância física são os operadores de Møller ("Møller wave operators") $\Omega_\pm$ que ocorrem na teoria do espalhamento. Tanto Ω_+ quanto Ω_- são isométricos, mas quando há estados ligados nenhum dos dois é unitário (Taylor 1972, Cap. 2).

Exercício 12.3.2

Em $\mathscr{H} = L^2(0,\infty)$, considere o operador de translação T_a definido para $a > 0$ por

$$(T_a f)(x) = \begin{cases} f(x-a) & \text{se } x \geq a \\ 0 & \text{se } 0 \leq x < a \end{cases}.$$

(a) Interprete geometricamente o efeito de T_a sobre uma função f. (b) Prove que T_a é isométrico, isto é,

$$\langle T_a f, T_a g\rangle = \langle f, g\rangle \quad \forall f, g \in \mathscr{H}.$$

(c) Usando a definição de adjunto, mostre que

$$(T_a^* f)(x) = f(x+a) \quad \forall f \in \mathscr{H}$$

e que

$$(T_a^* T_a f)(x) = f(x) \quad \forall f \in \mathscr{H},$$

ou seja, $T_a^* T_a = I$. Prove, no entanto, que

$$(T_a T_a^* f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq a \\ 0 & \text{se } 0 \leq x < a \end{cases},$$

de modo que $T_a T_a^* \neq I$ e T_a não é unitário. (d) Qual das condições definidoras de operador unitário foi violada neste exemplo?

Uma das mais importantes características dos operadores unitários é a de serem os executores da transição de uma base ortonormal para outra.

Teorema 12.14 *Se U é um operador unitário e $\{e_n\}$ é base ortonormal de $\mathscr{H}$, então $\{Ue_n\}$ é base ortonormal de $\mathscr{H}$. Reciprocamente, se $\{e_n\}$ e $\{e'_n\}$ são bases ortonormais de $\mathscr{H}$, existe um operador unitário U tal que $e'_n = Ue_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Se U é unitário, $\langle Ue_k, Ue_l\rangle = \langle e_k, e_l\rangle = \delta_{kl}$, de modo que $\{Ue_n\}$ é um sistema ortonormal. Se $\langle x, Ue_n\rangle = 0$ para todo n, resulta $\langle U^*x, e_n\rangle = 0$ donde $U^*x = 0$ porque $\{e_n\}$ é base ortonormal de $\mathscr{H}$. Portanto, $x = UU^*x = U0 = 0$ e segue-se que $\{Ue_n\}$ é base ortonormal pelo Teorema 10.17. Se $\{e_n\}$ e $\{e'_n\}$ são bases ortonormais, defina $Ue_n = e'_n$ e estenda U a $\mathscr{H}$ por linearidade:

$$Ux = U\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e'_k$$

onde, naturalmente, $\alpha_k = \langle e_k, x\rangle$. Note que U está bem definido porque a série mais à direita na equação acima é convergente pelas razões apontadas na demonstração do Corolário 10.15. Resta mostrar que U é unitário. Para quaisquer $x, y \in \mathscr{H}$,

$$\begin{aligned}
\langle Ux, Uy\rangle &= \lim_{n\to\infty}\Big\langle \sum_{k=1}^{n} \langle e_k,x\rangle e'_k, \sum_{l=1}^{n} \langle e_l,y\rangle e'_l\Big\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k,l=1}^{n} \overline{\langle e_k,x\rangle}\langle e_l,y\rangle\langle e'_k,e'_l\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k,l=1}^{n} \langle x,e_k\rangle\langle e_l,y\rangle\delta_{kl} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle e_k,y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle\langle e_k,y\rangle = \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

em virtude da relação de Parseval. Isto estabelece que U é um operador isométrico. Dado qualquer $y = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e'_k \in \mathscr{H}$, basta definir $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ para se ter $Ux = y$. Assim, $\mathrm{Ran}(U) = \mathscr{H}$ e U é unitário. ∎

Operador de Fourier-Plancherel

De acordo com o Teorema 9.27, o operador de Fourier $\mathscr{F}$ definido por

$$\mathscr{F}f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\,dx \tag{12.7}$$

sobre o espaço de Schwartz $\mathscr{S} \subset L^2(\mathbb{R})$ preserva o produto interno:

$$\langle f, g\rangle = \langle \mathscr{F}f, \mathscr{F}g\rangle . \tag{12.8}$$

Portanto, $\mathscr{F}$ é um operador limitado definido sobre um domínio denso. Pelo Teorema 11.8, o operador $\mathscr{F}$ pode ser estendido continuamente a todo o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Por ser isométrico em $\mathscr{S}$, veremos que a extensão contínua de $\mathscr{F}$ a $L^2(\mathbb{R})$ é um operador unitário. Essa extensão, que será denotada por U_F, é conhecida como **operador de Fourier-Plancherel**.

A fórmula (12.7) não pode ser usada para expressar $U_F f$ para um elemento qualquer de $L^2(\mathbb{R})$ porque só faz sentido se $f \in L^1(\mathbb{R})$. Para uma função de quadrado integrável f qualquer, define-se $U_F f = \lim_{n\to\infty} \mathscr{F} f_n$ para uma sequência qualquer (f_n) de elementos de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ que converge para f na norma de $L^2(\mathbb{R})$. É notável que, a despeito de sua definição indireta, é possível encontrar uma fórmula explícita para $U_F f$ que generaliza (12.7) e vale para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Lema 12.15 *Para todo $x \in \mathbb{R}$, cada uma das funções $h_x^{(\pm)} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definidas por*

$$h_x^{(\pm)}(k) = \frac{e^{\pm ikx} - 1}{\pm ik} \tag{12.9}$$

pertence a $L^2(\mathbb{R})$.

Demonstração. Levando em conta que $h_x^{(-)} = \overline{h_x^{(+)}}$, basta considerar $h_x^{(+)}$. Como

$$\lim_{k\to 0} \frac{e^{ikx} - 1}{ik} = x, \tag{12.10}$$

$h_x^{(+)}$ é contínua sobre toda a reta real. Por outro lado,

$$|h_x^{(+)}(k)| \leq \frac{2}{|k|}, \tag{12.11}$$

para todo $k \neq 0$, de modo que $|h_x^{(+)}|^2$ é integrável nos intervalos $(-\infty, -1]$ e $[1, \infty)$. Como $|h_x^{(+)}|^2$ é integrável em $[-1,1]$ porque $h_x^{(+)}$ é contínua, segue-se que $|h_x^{(+)}|^2$ é integrável sobre $\mathbb{R}$. ∎

Teorema 12.16 *Para qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$ e para quase todo x real,*

$$U_F f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx} - 1}{-ik} f(k)\, dk. \tag{12.12}$$

Demonstração. Dado $f \in L^2(\mathbb{R})$, considere a sequência (f_n) com

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } -n \leq x \leq n \\ 0 & \text{se } |x| > n \end{cases}. \qquad 12.13$$

É claro que cada $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ e $f_n \to f$ em $L^2(\mathbb{R})$, de modo que $\mathscr{F} f_n \to U_F f$. Portanto, para qualquer $g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle g, U_F f \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle g, \mathscr{F} f_n \rangle. \qquad 12.14$$

Escolhendo g como a função definida por[2]

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0,x] \\ 0 & \text{se } t \notin [0,x] \end{cases} \qquad 12.15$$

resulta

$$\int_0^x U_F f(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x dt \int_{-n}^{n} e^{-ikt} f(k) dk. \qquad 12.16$$

Pelo teorema de Fubini, podemos escrever

$$\int_0^x dt \int_{-n}^{n} e^{-ikt} f(k)\, dk = \int_{-n}^{n} f(k)\, dk \int_0^x e^{-ikt}\, dt = \int_{-n}^{n} \frac{e^{-ikx}-1}{-ik} f(k)\, dk. \qquad 12.17$$

Consequentemente,

$$\int_0^x U_F f(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{e^{-ikx}-1}{-ik} f(k)\, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}-1}{-ik} f(k)\, dk \qquad 12.18$$

onde a última igualdade é válida porque, em virtude do Lema 12.15, a função $h_x^{(-)} f$ pertence a $L^1(\mathbb{R})$. De (12.18) decorre imediatamente que (12.12) vale para quase todo $x \in \mathbb{R}$. ∎

Teorema 12.17 *O operador $U_F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ é unitário.*

Demonstração. Basta mostrar que $\text{Ran}(U_F) = L^2(\mathbb{R})$, ou seja, que dado $g \in L^2(\mathbb{R})$ existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $U_F f = g$. Em $\mathscr{S}$, seja (g_n) uma sequência tal que $g_n \to g$ e consideremos a sequência (f_n) com $f_n = \overline{\mathscr{F}} g_n$, de modo que $g_n = \mathscr{F} f_n$. Existe o limite $f \in L^2(\mathbb{R})$ da sequência (f_n) porque $\overline{\mathscr{F}}$ é um operador limitado. Uma vez que

$$U_F f_n = \mathscr{F} f_n = \mathscr{F} \overline{\mathscr{F}} g_n = g_n, \qquad 12.19$$

2. Se $x < 0$ basta substituir $[0,x]$ por $[x,0]$.

temos

$$g = \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} U_F f_n = U_F \lim_{n\to\infty} f_n = U_F f\,, \tag{12.20}$$

o que completa a demonstração. ∎

Corolário 12.18 *A extensão contínua do operador de Fourier conjugado* $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ *a todo o espaço de Hilbert* $L^2(\mathbb{R})$ *é o operador unitário* $U_{\bar{F}} = U_F{}^* = U_F{}^{-1}$. *Além disso,*

$$U_{\bar{F}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} - 1}{ik} f(k)\, dk \tag{12.21}$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$ *e quase todo* x *real.*

Demonstração. A prova de que $U_{\bar{F}}$ é unitário e dado por 12.21 é idêntica à dos Teoremas 12.16 e 12.17, exceto pela troca de i por $-i$ onde se fizer necessário. Dado $f \in L^2(\mathbb{R})$, seja f_n uma sequência em $\mathcal{S}$ que converge para f. Então,

$$\begin{aligned} f &= \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} f_n \\ &= \lim_{n\to\infty} U_F U_{\bar{F}} f_n \\ &= U_F \lim_{n\to\infty} U_{\bar{F}} f_n = U_F U_{\bar{F}} \lim_{n\to\infty} f_n = U_F U_{\bar{F}} f\,. \end{aligned} \tag{12.22}$$

De modo inteiramente análogo, conclui-se que $U_{\bar{F}} U_F f = f$ para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$, o que completa a demonstração. ∎

Observação. Nas Eqs.(12.12) e (12.21) não se pode tomar a derivada sob o sinal de integral, exceto se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Juntamente com o teorema da convolução — equação (9.115) —, a equação (12.8) estendida a funções pertencentes a $L^2(\mathbb{R})$ permite o cálculo de certas integrais sobre toda a reta real, desde que o integrando envolva a transformada de Fourier de uma função suficientemente simples para que sua integral possa ser calculada diretamente (Problema 12.5).

Assim como no caso unidimensional que acabamos de discutir, a identidade de Parseval (9.132) e o fato de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ser denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$ têm como consequência que a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ estende-se como um operador unitário $U_F : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. Por simplicidade e economia, sempre que conveniente denotaremos $U_F f$ e $U_{\bar{F}} f$ por $\hat{f}$ e $\check{f}$, respectivamente.

12.4 *Operadores Autoadjuntos*

Na mecânica quântica postula-se que a cada grandeza física mensurável corresponde um único operador autoadjunto, também conhecido pelos físicos como **observável**.

Definição 12.19 *Um operador linear A num espaço de Hilbert é* ***autoadjunto*** *se e somente se $A = A^*$, isto é, se e somente se A é simétrico e* $D(A) = D(A^*)$.

Caso certos axiomas sejam aceitos no que concerne à interpretação probabilística da mecânica quântica, o postulado de que cada grandeza física mensurável é representada por um operador autoadjunto pode ser deduzido como um teorema (Richtmyer 1978).

Comentário. De acordo com o Teorema 12.8, se o domínio de um operador é aumentado o domínio do seu adjunto é diminuído. Portanto, é impossível estender um operador autoadjunto sem destruir sua autoadjuntice. Por este motivo, na literatura mais antiga usava-se o termo *hypermaximal* em lugar de *self-adjoint*.

Já observamos antes que se A é simétrico tem-se $A^*x = Ax$ para todo $x \in D(A)$, de modo que $D(A) \subset D(A^*)$. Para provar que A é autoadjunto é suficiente mostrar que $D(A^*) \subset D(A)$. Neste caso, teremos $A^*x = Ax$ para cada vetor x pertencente ao domínio comum de A e A^*. A condição $D(A) = D(A^*)$ é crucial mas frequentemente ignorada pelos físicos, que costumam tratar a hermiticidade (simetria) como suficiente para a obtenção de resultados que, na verdade, são garantidos somente para operadores autoadjuntos. A desconsideração de domínios de operadores ilimitados pode ser a causa de certas falácias ou aparentes paradoxos na mecânica quântica (Perlman & Troup 1969; Lieber 1972), conforme discutiremos pormenorizadamente no último capítulo.

Exemplo 12.4.1

O operador Q em $L^2(\mathbb{R})$ é autoadjunto. Mostremos, inicialmente, que $D(Q)$, definido no Exercício 11.2.4, é denso. Dado $f \in L^2(\mathbb{R})$, considere a sequência (f_n) de elementos de $L^2(\mathbb{R})$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad -n \leq x \leq n \\ 0 & \text{se} \quad |x| > n \end{cases}.$$

Cada f_n pertence ao domínio de Q porque

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f_n(x)|^2 dx = \int_{-n}^{n} x^2|f_n(x)|^2 dx$$
$$\leq n^2 \int_{-n}^{n} |f_n(x)|^2 dx \leq n^2\|f\|^2 < \infty.$$

Por outro lado,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{|x|>n} |f(x)|^2$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|^2 dx - \int_{-n}^{n} |f_n(x)|^2 dx \right\} = 0$$

e $f_n \to f$, provando que D(Q) é denso. Como já sabemos que Q é simétrico, precisamos investigar o domínio de Q^*. Por definição de adjunto, se $g \in$ D(Q^*) existe $g_* \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $(g_*, f) = (g, Qf)$ para todo $f \in$ D(Q). Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g_*(x)}\, f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\, x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x g(x)}\, f(x) dx,$$

donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g_*(x) - x g(x)}\, f(x) dx = 0 \Longrightarrow (g_* - xg, f) = 0 \;\; \forall f \in \mathrm{D}(Q).$$

Como D(Q) é denso, $g_* - xg = 0$, isto é, $xg = g_* \in L^2(\mathbb{R})$, implicando que $g \in$ D(Q). Isto prova que D(Q^*) = D(Q) e, por conseguinte, Q é autoadjunto.

Como regra, é fácil encontrar um domínio denso no qual um operador é simétrico, mas determinar exatamente o domínio que o torna autoadjunto, quando tal domínio existe, é uma tarefa muito difícil. O exemplo do operador Q é de uma simplicidade enganosa: quase nunca é trivial provar que um operador é autoadjunto, como ilustraremos com o caso do mais simples de todos os operadores diferenciais. Antes, porém, de passar ao exemplo, precisamos definir uma classe de funções importante, necessária para a especificação do domínio de operadores diferenciais autoadjuntos.

Espaços de Sobolev no Caso Unidimensional

Comecemos com uma extensão da noção de função absolutamente contínua introduzida no Apêndice A.

Definição 12.20 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é* ***absolutamente contínua*** *no intervalo finito ou infinito (a,b) se e somente se existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt \qquad 12.23$$

para todo $x \in (a,b)$ com g uma função localmente integrável em (a,b), isto é, integrável em qualquer subintervalo compacto de (a,b). Automaticamente, f é diferenciável em quase toda parte em (a,b) e $f' = g$. O conjunto das funções absolutamente contínuas em (a,b) é denotado por $AC(a,b)$. Para um intervalo compacto $[a,b]$, o conjunto $AC[a,b]$ é composto pelas funções f que satisfazem (12.23) *com $c = a$, $x \in [a,b]$ e $g \in L^1(a,b)$.*

É importante lembrar que, como está demonstrado no Apêndice A, se f,g são absolutamente contínuas então a soma $f+g$ e o produto fg também são funções absolutamente contínuas.

Definição 12.21 *Seja $m \geq 1$ um número inteiro. O* ***espaço de Sobolev*** $\mathsf{H}^m(a,b)$ *é definido por*

$$\mathsf{H}^m(a,b) = \{f \in L^2(a,b) \,|\, f^{(j)} \in AC(a,b),\ f^{(j+1)} \in L^2(a,b),\ 0 \leq j \leq m-1\}. \qquad 12.24$$

Em outras palavras, f é um elemento de $\mathsf{H}^m(a,b)$ se f e suas derivadas até a ordem $m-1$ são absolutamente contínuas e de quadrado integrável em (a,b), e se sua derivada de ordem m é de quadrado integrável em (a,b). De modo análogo define-se $\mathsf{H}^m[a,b]$ para um intervalo compacto $[a,b]$. Vale destacar que basta exigir que a função e sua derivada de ordem mais alta estejam em L^2, pois neste caso todas as derivadas de ordem mais baixa pertencem a L^2 automaticamente (Teschl 2006, p. 73). Isto significa que

$$\mathsf{H}^m(a,b) = \{f \in L^2(a,b) \,|\, f^{(j)} \in AC(a,b),\ 0 \leq j \leq m-1,\ f^{(m)} \in L^2(a,b)\}. \qquad 12.25$$

Ao contrário do que frequentemente se afirma em textos de mecânica quântica,[3] uma função de quadrado integrável não tende necessariamente a zero no infinito. Mas isto é verdade para f e suas derivadas até a ordem $m-1$ se $f \in \mathsf{H}^m(a,b)$ no caso em que (a,b) é um intervalo infinito.

Lema 12.22 *Seja* $f \in \mathsf{H}^m(a,b)$, $m \geq 1$. *Se* $b = \infty$ *então* $\lim_{x\to\infty} f^{(j)}(x) = 0$ *e se* $a = -\infty$ *então* $\lim_{x\to-\infty} f^{(j)}(x) = 0$, $j = 0,\ldots,m-1$.

Demonstração. Se $b = \infty$, para quaisquer $x, c \in (a,b)$ temos

$$|f^{(j)}(x)|^2 = |f^{(j)}(c)|^2 + \int_c^x \left[\overline{f^{(j)}(t)}f^{(j+1)}(t) + \overline{f^{(j+1)}(t)}f^{(j)}(t)\right] dt$$

para $j = 0,\ldots,m-1$. Como o integrando pertence a $L^1(c,\infty)$ porque $f^{(j)}$ e $f^{(j+1)}$ pertencem a $L^2(a,\infty)$, o limite $\lim_{x\to\infty} f^{(j)}(x)$ existe e só pode ser zero porque $f^{(j)} \in L^2(a,\infty)$. O mesmo argumento aplica-se ao caso $a = -\infty$. ∎

Vale notar que, como $C_0^\infty(a,b) \subset \mathsf{H}^m(a,b)$ e $C_0^\infty(a,b)$ é denso em $L^2(a,b)$, *a fortiori* $\mathsf{H}^m(a,b)$ é denso em $L^2(a,b)$.

OPERADOR P EM $L^2(\mathbb{R})$

Passemos ao prometido exemplo do mais simples de todos os operadores diferenciais de interesse para a mecânica quântica: o operador associado ao momento linear de uma partícula em uma dimensão (em unidades tais que $\hbar = 1$).

Exemplo 12.4.2

O operador $P = -i\,d/dx$ em $L^2(\mathbb{R})$ com domínio $D(P) = \mathsf{H}^1(-\infty,\infty)$ é autoadjunto. Mostremos primeiro que P é simétrico. Se $f,g \in D(P)$, uma integração por partes fornece

$$\langle Pf, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{-if'(x)}g(x)\,dx = i\overline{f(x)}g(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - i\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g'(x)\,dx = \langle f, Pg\rangle$$

3. Consulte, por exemplo, Griffiths (1995, p. 98).

porque, pelo Lema 12.22, $f(x)$ e $g(x)$ tendem a zero para $x \to \pm\infty$. Passemos, agora, ao problema da determinação do domínio do adjunto de P. Dado $g \in D(P^*)$ seja $g_* \in L^2(\mathbb{R})$ o elemento correspondente tal que $\langle f, g_* \rangle = \langle Pf, g \rangle$ para todo $f \in D(P)$. Então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} i\,\overline{f'(x)}\,g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\,g_*(x)\,dx. \qquad 12.26$$

Infelizmente, não podemos fazer uma integração por partes no primeiro membro desta equação porque o domínio de P^*, sendo potencialmente maior do que o domínio de P, pode conter funções não diferenciáveis ou cuja derivada não pertença a $L^2(\mathbb{R})$. A fim de possibilitar uma integração por partes no segundo membro de (12.26), vamos lançar mão de um expediente simples mas engenhoso. Dado $a > 0$, seja $C_0^\infty(-a,a)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contido no intervalo limitado $(-a,a)$. É claro que $C_0^\infty(-a,a) \subset D(P)$. Assim, com $f \in C_0^\infty(-a,a)$ a Eq. (12.26) escreve-se

$$\int_{-a}^{a} i\,\overline{f'(x)}\,g(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \overline{f(x)}\,g_*(x)\,dx. \qquad 12.27$$

Tendo em conta que $g_* \in L^1(-a,a)$ porque $g_* \in L^2(-a,a)$, podemos definir

$$h(x) = \int_0^x g_*(t)\,dt, \quad x \in (-a,a), \qquad 12.28$$

de modo que (12.27) torna-se

$$\int_{-a}^{a} i\,\overline{f'(x)}\,g(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \overline{f(x)}\,h'(x)\,dx. \qquad 12.29$$

Agora, uma integração por partes no segundo membro reduz esta última equação a

$$\int_{-a}^{a} i\,\overline{f'(x)}\,g(x)\,dx = -\int_{-a}^{a} \overline{f'(x)}\,h(x)\,dx$$
$$\Longrightarrow \int_{-a}^{a} \overline{f'(x)}\,\{h(x) + i g(x)\}\,dx = 0. \qquad 12.30$$

A validade disto para todo $f \in C_0^\infty(-a,a)$ revela que a função entre chaves define uma distribuição cuja derivada é zero. Pelo Teorema 9.6,

$$\int_0^x g_*(t)dt + ig(x) = C \qquad 12.31$$

em $(-a,a)$ para alguma constante C. Isto prova que g é absolutamente contínua em qualquer intervalo limitado e, portanto, absolutamente contínua em $\mathbb{R}$. Como a é um número positivo arbitrário, $\int_0^x g_*(t)dt + ig(x) = C$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $g' = ig_* \in L^2(\mathbb{R})$, o que estabelece que $g \in D(P) = H^1(-\infty,\infty)$ e, por conseguinte, $D(P^*) = D(P)$. Assim, $P^* g = g_* = -ig'$ para todo $g \in D(P^*) = D(P)$ e P é autoadjunto: P e P^* executam a mesma operação em seu domínio comum.

Note que o operador $-id/dx$ do Exemplo 12.1.2, que tem por domínio o espaço de Schwartz $\mathscr{S}$, não é autoadjunto porque o domínio do seu adjunto é maior do que $\mathscr{S}$.

CRITÉRIO BÁSICO DE AUTOADJUNTICE

Este último exemplo deixa claro que, excetuados os casos mais elementares, provar diretamente que um operador simétrico é autoadjunto representa uma tarefa espinhosa, pois a autoadjuntice é uma propriedade delicada e sutil. Isto torna imperiosa a busca de condições que caracterizem completamente operadores autoadjuntos. Um critério básico é sugerido por algumas observações simples. Seja A autoadjunto e suponha que $A^*x = ix$ para algum $x \in D(A) = D(A^*)$. Então

$$-i\langle x,x\rangle = \langle A^* x,x\rangle = \langle x,Ax\rangle = \langle x,A^* x\rangle = \langle x,ix\rangle = i\langle x,x\rangle$$

donde $x = 0$. Analogamente, $A^*x = -ix$ implica $x = 0$. Reciprocamente, se A é fechado e $\mathrm{Ker}(A^* + iI) = \mathrm{Ker}(A^* - iI) = \{0\}$ então A é autoadjunto, onde $\mathrm{Ker}(T)$ denota a **nulidade** ou **núcleo** de T, isto é, o conjunto dos $x \in D(T)$ tais que $Tx = 0$.

Teorema 12.23 *Se A é um operador simétrico num espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, as três afirmações abaixo são equivalentes:*

(a) *A é autoadjunto;*

(b) A *é fechado e* $\text{Ker}(A^* + iI) = \text{Ker}(A^* - iI) = \{0\}$;

(c) $\text{Ran}(A + iI) = \text{Ran}(A - iI) = \mathscr{H}$.

Observação. Em virtude da identidade $A \pm i\lambda I = \lambda(\frac{A}{\lambda} \pm iI)$, nas condições (b) e (c) pode-se substituir i por $i\lambda$, onde λ é qualquer número real diferente de zero.

Demonstração. Já vimos que (a) $\Longrightarrow$ (b). Vamos provar que (b) $\Longrightarrow$ (c) e (c) $\Longrightarrow$ (a). Se (b) vale, $A^* x = ix$ só possui a solução $x = 0$. Se $x \perp \text{Ran}(A + iI)$ então $\langle x, (A + iI)y\rangle = 0$ donde $\langle (A + iI)^* x, y\rangle = \langle (A^* - iI)x, y\rangle = 0$ para todo $y \in \text{D}(A)$. Mas como $\text{D}(A)$ é denso, segue-se que $(A^* - iI)x = 0$ donde $x = 0$ e $\text{Ran}(A + iI)$ é denso. Basta mostrar que $\text{Ran}(A + iI)$ é fechado para se inferir que $\text{Ran}(A + iI) = \mathscr{H}$. Para cada $x \in \text{D}(A)$ um cálculo direto mostra que

$$\|(A + iI)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2$$

porque A é simétrico, e disto se deduz que

$$\|Ax\| \le \|(A + iI)x\| \quad \text{e} \quad \|x\| \le \|(A + iI)x\|.$$

Assim, se $x_n \in \text{D}(A)$ e a sequência $(A + iI)x_n \to z \in \mathscr{H}$, deduz-se destas últimas desigualdades que (x_n) e (Ax_n) são sequências de Cauchy, de modo que existem $x, y \in \mathscr{H}$ tais que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$. Levando em consideração que A é fechado, $x \in \text{D}(A)$ e $Ax = y$, donde $z = (A + iI)x \in \text{Ran}((A + iI))$. Consequentemente, $\text{Ran}(A + iI)$ é fechado e, por ser denso, coincide com $\mathscr{H}$. Argumento análogo estabelece que $\text{Ran}(A - iI) = \mathscr{H}$. Admitamos, finalmente, a validade de (c). Então, se $x \in D(A^*)$ existe $y \in \text{D}(A)$ tal que $(A - iI)y = (A^* - iI)x$ já que $\text{Ran}(A - iI) = \mathscr{H}$. Mas para $y \in \text{D}(A)$ temos $A^* y = Ay$ porque A é simétrico, de modo que

$$(A^* - iI)(x - y) = 0.$$

Desejamos provar que a única solução desta equação é $x - y = 0$. Se $z \in \text{Ker}(A^* - iI)$ temos $\langle (A^* - iI)z, w\rangle = 0$ para todo $w \in \text{D}(A)$, ou seja,

$$0 = \langle (A^* - iI)z, w\rangle = \langle z, (A + iI)w\rangle \quad \forall w \in \text{D}(A).$$

Mas, como $\text{Ran}(A + iI) = \mathscr{H}$, concluímos que $z = 0$ e $x = y$. Assim, $x \in \text{D}(A)$ e disto decorre que $\text{D}(A^*) \subset \text{D}(A)$, o que prova que A é autoadjunto. ∎

Exemplo 12.4.3
Considere o operador de posição Q em $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$ com domínio definido no Exercício 11.2.4. Para cada $g \in L^2(\mathbb{R})$ defina

$$f(x) = \frac{1}{x+i}\, g(x).$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} |g(x)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty,$$

segue-se que $f \in L^2(\mathbb{R})$. Além disso,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2+1} |g(x)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty,$$

de modo que $f \in D(Q)$ e $(Q+iI)f = g$, provando que $\text{Ran}(Q+iI) = \mathscr{H}$. Raciocínio similar mostra que $\text{Ran}(Q-iI) = \mathscr{H}$. Pelo Teorema 12.23, Q é autoadjunto.

Exemplo 12.4.4
Reconsideremos o operador $P = -id/dx$ em $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$ com domínio definido no Exemplo 12.4.2. Tentemos provar que $\text{Ran}(P-iI) = \mathscr{H}$. Para que isto seja verdade, para todo $g \in L^2(\mathbb{R})$ é preciso que exista $f \in D(P)$ tal que

$$(P-iI)f = g \;\text{ ou }\; \frac{df}{dx} + f = ig. \tag{12.32}$$

Multiplicando ambos os membros desta equação diferencial por e^x obtém-se

$$\frac{d}{dx}\left(e^x f\right) = ie^x g,$$

que admite a solução

$$f(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} ie^t g(t)dt = i\int_{-\infty}^{x} e^{t-x} g(t)dt. \tag{12.33}$$

Esta última equação mostra que $f \in AC(-\infty,\infty)$ porque é o produto de duas funções absolutamente contínuas — é claro que e^{-x} pertence a

$AC(-\infty, \infty)$ e $e^t \in L^2(-\infty, b)$ para qualquer $b < \infty$, de modo que $e^t g \in L^1(-\infty, b)$. Para mostrar que $f \in D(P)$ precisamos nos certificar de que $f \in L^2(\mathbb{R})$. Introduzindo a variável $u = t - x$ podemos escrever

$$f(x) = i \int_{-\infty}^{0} e^u g(u+x) du$$
$$= i \int_{-\infty}^{\infty} h(u) g(u+x) du$$

onde

$$h(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u > 0 \\ e^u & \text{se } u < 0 \end{cases} .$$

Note que $h \in L^2(\mathbb{R})$ e $g(u+x) \in L^2(\mathbb{R})$ na variável u para cada x, de modo que o produto $h(u)g(u+x) \in L^1(\mathbb{R})$ na variável u para cada x. Portanto, a função f está bem definida e temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \overline{g(u+x)} du \int_{-\infty}^{\infty} h(v) g(v+x) dv$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(u) du \int_{-\infty}^{\infty} h(v) dv \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(u+x)} g(v+x) dx . \tag{12.34}$$

A mudança na ordem de integração é permitida pelo teorema de Fubini. Com efeito, pela desigualdade de Schwarz para integrais, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\overline{g(u+x)} g(v+x)| dx \leq \|g\| \|g\| = \|g\|^2$$

donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(u)| du \int_{-\infty}^{\infty} |h(v)| dv \int_{-\infty}^{\infty} |\overline{g(u+x)} g(v+x)| dx \leq \|g\|^2 < \infty,$$

onde usamos $\int_{-\infty}^{\infty} |h(u)| du = \int_{-\infty}^{0} e^u du = 1$. Portanto, a integral (12.34) é finita e $f \in L^2(\mathbb{R})$. Além disso, f dada por (12.33) é a única solução de (12.32) em $L^2(\mathbb{R})$ porque a solução da equação homogênea é Ce^{-x}, que só pertence a $L^2(\mathbb{R})$ se $C = 0$. Para arrematar, veja que $f' = ig - f \in L^2(\mathbb{R})$ porque $g \in L^2(\mathbb{R})$. Portanto, $f \in D(P)$ e $\text{Ran}(P - iI) = \mathcal{H}$. Com argumentos análogos prova-se (Exercício 12.4.1 abaixo) que $\text{Ran}(P + iI) = \mathcal{H}$. Consequentemente, P é autoadjunto.

Exercício 12.4.1
A fim de completar o raciocínio empregado neste último exemplo, prove que $\text{Ran}(P + iI) = \mathscr{H}$.

A condição (c) do Teorema 12.23 admite uma generalização útil, obtida pela substituição da unidade imaginária i por um número complexo arbitrário.

Teorema 12.24 *Seja A um operador simétrico tal que* $\text{Ran}(A + \lambda I) = \text{Ran}(A + \bar{\lambda} I) = \mathscr{H}$ *para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Então A é autoadjunto.*
Demonstração. Seja $x \in D(A^*)$. Como $\text{Ran}(A + \bar{\lambda} I) = \mathscr{H}$, existe $y \in D(A)$ tal que $(A + \bar{\lambda} I)y = (A^* + \bar{\lambda} I)x$. Temos

$$\langle x, (A + \lambda I)z \rangle = \langle (A^* + \bar{\lambda} I)x, z \rangle = \langle (A + \bar{\lambda} I)y, z \rangle = \langle y, (A + \lambda I)z \rangle , \quad \forall z \in D(A),$$

onde a última igualdade decorre do fato de A ser simétrico. Como $\text{Ran}(A + \lambda I) = \mathscr{H}$, segue-se que $x = y \in D(A)$. ∎

Exercício 12.4.2
Aplique este último teorema com $\lambda = 1$ para provar que o operador $P^2 = -d^2/dx^2$ em $L^2(-\infty,\infty)$ com domínio $D(P^2) = H^2(-\infty,\infty)$ é autoadjunto. Sugestão: mostre que a equação $-u'' + u = f$ com $f \in L^2(-\infty,\infty)$ admite a solução

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t)\, dt$$

e prove que esta é a única solução em $H^2(-\infty,\infty)$.

TRANSFORMAÇÃO UNITÁRIA DE OPERADOR AUTOADJUNTO
Na mecânica quântica, uma transformação unitária executa uma simples mudança de base ou de representação, sem afetar nenhuma previsão física: qualquer quantidade física mensurável permanece inalterada por uma transformação unitária. Se um vetor x é mapeado em Ux, cada operador A é mapeado em UAU^{-1} para que todo autovetor de A seja mapeado num autovetor de UAU^{-1} com o mesmo autovalor. Em particular, uma transformação unitária deve mapear operadores autoadjuntos em operadores autoadjuntos.

Teorema 12.25 *Se $A : D(A) \to \mathscr{H}_1$ é autoadjunto em $\mathscr{H}_1$ e $U : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ é unitário, o operador $B : D(B) \to \mathscr{H}_2$ definido por*

$$B = UAU^{-1} \quad com \quad D(B) = UD(A)$$

é autoadjunto em $\mathscr{H}_2$.

Demonstração. Como $D(B)$ é denso — Exercício 12.4.3 abaixo —, B^* existe. Se $x, y \in D(B)$, usando $A = A^*$ e $\langle U^{-1}z, U^{-1}w\rangle_1 = \langle z, w\rangle_2$ obtemos

$$\begin{aligned}\langle x, By\rangle_2 &= \langle x, UA^*U^{-1}y\rangle_2 = \langle U^{-1}x, A^*U^{-1}y\rangle_1 \\ &= \langle AU^{-1}x, U^{-1}y\rangle_1 \\ &= \langle UAU^{-1}x, y\rangle_2 = \langle Bx, y\rangle_2,\end{aligned}$$

mostrando que B é simétrico. Só falta mostrar que $D(B^*) = D(B)$. Se $y \in D(B^*)$ existe $y_* \in \mathscr{H}_2$ tal que $\langle y_*, x\rangle_2 = \langle y, Bx\rangle_2$ para todo $x \in D(B)$. Todos os elementos de $D(B)$ são da forma Uz com $z \in D(A)$, donde

$$\langle y_*, Uz\rangle_2 = \langle y, BUz\rangle_2 = \langle y, UAU^{-1}Uz\rangle_2 = \langle y, UAz\rangle_2 \text{ para todo } z \in D(A).$$

Portanto,

$$\langle U^{-1}y_*, z\rangle_1 = \langle U^{-1}y, Az\rangle_1 \text{ para todo } z \in D(A),$$

de modo que $U^{-1}y \in D(A^*) = D(A)$ donde $y \in UD(A) = D(B)$. Logo, $D(B^*) \subset D(B)$ e B é autoadjunto. ∎

Se A definido em $\mathscr{H}$ é autoadjunto e $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ é unitário, este último teorema justifica o cálculo formal

$$B^* = (UAU^*)^* = U^{**}A^*U^* = UAU^{-1} = B$$

mesmo se A é um operador ilimitado. Os operadores A e $B = UAU^{-1}$ são ditos **unitariamente equivalentes** porque B desfruta de todas as propriedades que caracterizam A.

Exercício 12.4.3
Prove que um operador unitário mapeia variedades lineares densas em variedades lineares densas. Sugestão: use o Teorema 12.4.

Exemplo 12.4.5

Em certos problemas de cosmologia quântica aparece naturalmente o operador diferencial

$$H_0 = -\sqrt{R}\frac{d}{dR}R\frac{d}{dR}\sqrt{R} \tag{12.35}$$

em $L^2(0,\infty)$ com domínio a ser especificado (Lemos 1996). Considere a transformação unitária de $\mathscr{H} = L^2(0,\infty)$ em $\tilde{\mathscr{H}} = L^2(-\infty,\infty)$ definida por $\tilde{\psi} = U\psi$ com

$$\tilde{\psi}(x) = e^{-x/2}\psi(e^{-x}).$$

O operador U assim definido é unitário porque é uma bijeção que preserva o produto interno:

$$\int_0^\infty \overline{\phi(R)}\,\psi(R)\,dR = \int_\infty^{-\infty} \overline{\phi(e^{-x})}\,\psi(e^{-x})\,(-e^{-x})\,dx = \int_{-\infty}^\infty \overline{\tilde{\phi}(x)}\,\tilde{\psi}(x)\,dx.$$

Vê-se, assim, que U pode ser interpretado como o executor da mudança de variável $R = e^{-x}$ que estabelece uma bijeção entre $(0,\infty)$ e $(-\infty,\infty)$. Usando $d/dR = -e^x d/dx$ temos

$$\begin{aligned} -(H_0\psi)(R) &= \sqrt{R}\frac{d}{dR}R\frac{d}{dR}\sqrt{R}\,\psi(R) \\ &= e^{-x/2}e^x\frac{d}{dx}e^{-x}e^x\frac{d}{dx}e^{-x/2}\psi(e^{-x}) = e^{x/2}\frac{d^2\tilde{\psi}(x)}{dx^2}. \end{aligned} \tag{12.36}$$

O operador transformado $\tilde{H}_0 = UH_0U^{-1}$ pode ser determinado impondo $\langle\tilde{\phi},\tilde{H}_0\tilde{\psi}\rangle_{\tilde{\mathscr{H}}} = \langle\phi,H_0\psi\rangle_{\mathscr{H}}$:

$$\begin{aligned} \langle\tilde{\phi},\tilde{H}_0\tilde{\psi}\rangle_{\tilde{\mathscr{H}}} &= \langle\phi,H_0\psi\rangle_{\mathscr{H}} \\ &= \int_0^\infty \overline{\phi(R)}(H_0\psi)(R)\,dR = -\int_0^\infty \overline{\phi(R)}e^{x/2}\frac{d^2\tilde{\psi}(x)}{dx^2}\,dR \\ &= -\int_{-\infty}^\infty \overline{\phi(e^{-x})}e^{x/2}\frac{d^2\tilde{\psi}(x)}{dx^2}\,e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^\infty \overline{\tilde{\phi}(x)}\left(-\frac{d^2\tilde{\psi}(x)}{dx^2}\right)dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{H}_0 = -\frac{d^2}{dx^2}, \tag{12.37}$$

que é autoadjunto no domínio $D(\tilde{H}_0) = H^2(-\infty,\infty)$ (vide Exercício 12.4.2). Segue-se que H_0 é autoadjunto em $L^2(0,\infty)$ no domínio $D(H_0) = U^{-1}D(\tilde{H}_0)$.

12.5 *Extensões Autoadjuntas de Operadores Simétricos*

Se um operador é simétrico mas não é autoadjunto, seu domínio é um subconjunto próprio do domínio do seu adjunto. Torna-se importante estudar em que circunstâncias é possível estender o domínio de um operador simétrico de modo a torná-lo autoadjunto, e se essa extensão é única.

Conforme o Teorema 12.8, se B é uma extensão de A então A^* é uma extensão de B^*, isto é,

$$A \subset B \implies B^* \subset A^* . \qquad 12.38$$

Para um operador simétrico A sempre temos $A \subset A^*$ e, pelo Teorema 12.9, $A \subset A^{**}$. Com o uso de (12.38), de $A \subset A^*$ deduz-se $A^{**} \subset A^*$, o que nos conduz a

$$A \subset A^{**} \subset A^* . \qquad 12.39$$

O operador A é autoadjunto se $A = A^* = A^{**}$. Note que, em geral, $A^{**} \neq A$ e várias situações são possíveis:

(a) $A = A^{**}$ mas $A^{**} \neq A^*$ (A é fechado mas não é autoadjunto).

(b) $A^{**} = A^*$ mas $A \neq A^{**}$ (A é essencialmente autoadjunto).

(c) $A \neq A^{**} \neq A^*$ (A não é fechado nem essencialmente autoadjunto).

O caso (b) é particularmente simples no que se refere à existência de extensões autoadjuntas de operadores simétricos.

Definição 12.26 *Um operador simétrico A é dito* ***essencialmente autoadjunto*** *se o seu adjunto é autoadjunto, isto é, $A^{**} = A^*$.*

Teorema 12.27 *Um operador essencialmente autoadjunto A possui uma única extensão autoadjunta, que coincide com A^*.*

Demonstração. Se A é essencialmente autoadjunto, (12.39) mostra que A^* é uma extensão autoadjunta de A, já que $(A^*)^* = A^{**} = A^*$. Para demonstrar a unicidade, seja B uma outra extensão autoadjunta de A. De $A \subset B$ resultam

$B^* \subset A^*$ e $A^{**} \subset B^{**}$, ou seja, $B \subset A^*$ e $A^* \subset B$ pois, por hipótese, $B = B^*$ e $A^{**} = A^*$. Portanto, $B = A^*$ e a demonstração está completa. ∎

De modo geral, é muito difícil encontrar o domínio exato de um operador simétrico A no qual ele é autoadjunto. Costuma ser mais fácil determinar um domínio no qual A é essencialmente autoadjunto, pois isto assegura a existência de uma única extensão autoadjunta do operador, o que é suficiente para que A possa representar uma grandeza física mensurável na mecânica quântica.

Um operador simétrico pode ter muitas, nenhuma ou apenas uma extensão autoadjunta.

Exemplo 12.5.1

Seja $P = -id/dx$ em $L^2(a,b)$ com domínio denso definido por

$$D(P) = \{f \in H^1[a,b] \mid f(a) = f(b) = 0\}.$$

Uma integração por partes fornece

$$\langle f, Pg\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}(-ig'(x))dx$$
$$= -i\overline{f(x)}g(x)\Big|_a^b + i\int_a^b \overline{f'(x)}g(x)dx = \langle Pf, g\rangle \quad \forall f,g \in D(P),$$

de modo que P é simétrico. Precisamos determinar $D(P^*)$. Se $f \in AC[a,b]$ e $g \in D(A)$, podemos integrar por partes para obter

$$\langle f, Pg\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}(-ig'(x))dx$$
$$= -i\overline{f(x)}g(x)\Big|_a^b + i\int_a^b \overline{f'(x)}g(x)dx = \langle -if', g\rangle \quad \forall g \in D(P),$$

de modo que $f \in D(P^*)$ e $P^*f = -if'$. Note que $D(P) \neq D(P^*)$ porque as condições de contorno sobre $g \in D(P)$ são tão fortes que $f \in D(P^*)$ não precisa se anular em $x = a$ ou $x = b$. Acabamos de verificar que $D(P^*) \supset AC[a,b]$. Por meio do mesmo estratagema posto em prática no Exemplo 12.4.2, prova-se que $D(P^*) = AC[a,b]$. Como as funções do

domínio de P^* não precisam se anular em $x = a$ nem em $x = b$, P não é autoadjunto porque seu domínio é menor do que o domínio de P^*. Vejamos se P admite extensões autoadjuntas.

Suponha que S seja uma extensão de P e busquemos condições para que S seja um operador autoadjunto. Como $S^* \subset P^*$, sabemos que se $f \in D(S^*)$ então $f \in H^1[a,b]$ e $S^* f = P^* f = -if'$. Para $f \in D(S^*)$ e $g \in D(S)$, uma integração por partes fornece

$$0 = \langle f, Sg \rangle - \langle S^* f, g \rangle = -i\left[\overline{f(b)}g(b) - \overline{f(a)}g(a)\right]. \qquad 12.40$$

Como S é uma extensão de P, seu domínio deve conter alguma função g com $g(a) \neq 0$ ou $g(b) \neq 0$. Tomando $f = g$ em (12.40) resulta

$$|g(b)|^2 = |g(a)|^2 \implies g(b) = e^{i\theta} g(a) \;\text{ com }\; \theta \in [0, 2\pi).$$

Para qualquer outra função $f \in D(S^*)$ a equação (12.40) requer $f(b) = e^{i\theta} f(a)$ com o mesmo θ. Portanto, as funções de $D(S^*)$ e $D(S)$ obedecem às mesmas condições de contorno, $D(S^*) = D(S)$ e $S = S^*$. Assim, P possui uma infinidade de extensões autoadjuntas $P_\theta = -i\,d/dx$ com domínio

$$D(P_\theta) = \{f \in H^1[a,b] \,|\, f(b) = e^{i\theta} f(a)\}, \qquad 12.41$$

onde $\theta \in [0, 2\pi)$.

Exemplo 12.5.2

Considere agora $P = -i\,d/dx$ em $L^2(0,\infty)$ com domínio

$$D(P) = \{f \in H^1(0,\infty) \,|\, f(0) = 0\}.$$

Do ponto de vista físico, $L^2(0,\infty)$ representa o espaço de estados de uma partícula confinada à semirreta real $(0,\infty)$ por uma parede intransponível ou barreira de potencial infinitamente alta em $x = 0$. Este espaço de estados também aparece em problemas de cosmologia quântica. Como já sabemos que necessariamente $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ para $f \in H^1(0,\infty)$, a condição de contorno $f(0) = 0$ é suficiente para que P seja simétrico:

$$(Pf,g) = \int_0^\infty \overline{-if'(x)}g(x)dx$$
$$= i\big[\overline{f(\infty)}g(\infty) - \overline{f(0)}g(0)\big] - i\int_0^\infty \overline{f(x)}g'(x)dx = \langle f, Pg\rangle$$

para quaisquer $f,g \in D(P)$. O operador P não possui extensões autoadjuntas. Na verdade, P nem sequer possui extensões simétricas. Como no exemplo anterior, verifica-se que o domínio de P^* coincide com a coleção das funções $f \in H^1(0,\infty)$ sem nenhuma condição de contorno em $x=0$. Supondo que P admite uma extensão simétrica $\tilde{P}$, o domínio de $\tilde{P}$ tem que conter algum elemento f com $f(0) \neq 0$. Como $\tilde{P}f = \tilde{P}^*f = P^*f = -if'$ porque $\tilde{P}^* \subset P^*$, segue-se que

$$\langle f,\tilde{P}f\rangle - \langle \tilde{P}f,f\rangle = -i\int_0^\infty \big[\overline{f(x)}f'(x) + \overline{f'(x)}f(x)\big]dx$$
$$= -i|f(0)|^2 \neq 0$$

e $\tilde{P}$ não é simétrico, uma contradição.

Conforme acabamos de ver, um operador simétrico nem sempre possui extensões autoadjuntas. Para os propósitos da Física é desnecessário fazer distinção entre operadores autoadjuntos e operadores essencialmente autoadjuntos, pois estes últimos possuem uma única extensão autoadjunta. O problema matemático relevante consiste em determinar se um dado operador simétrico possui extensões autoadjuntas e, se for o caso, como podem ser elas caracterizadas. Quando há múltiplas extensões autoadjuntas, espera-se que elas possam ser distinguidas pela *física* do sistema investigado. O problema de escolher a extensão autoadjunta correta diz respeito à Física, não à Matemática, e pode haver razões físicas para que um operador não tenha nenhuma ou tenha muitas extensões autoadjuntas (Capri 2002, Cap. 6; Reed & Simon 1975, Seção X.1).

Pelo Teorema 12.23, um operador simétrico A é autoadjunto se e somente se $\text{Ran}(A \pm iI) = \mathscr{H}$. Se considerarmos os complementos ortogonais $\text{Ran}(A \pm iI)^\perp$, os seus "tamanhos" indicam em que medida A não é autoadjunto. Esses subespaços são chamados de *subespaços de deficiência* de A e suas respectivas dimensões são os *índices de deficiência* de A.

Definição 12.28 *Dado um operador simétrico A, sejam*

$$K_+ = \text{Ran}(A + iI)^\perp = \text{Ker}(A^* - iI),$$
$$K_- = \text{Ran}(A - iI)^\perp = \text{Ker}(A^* + iI).$$

Dizemos que K_+ e K_- são os ***subespaços de deficiência*** *de A e os números*

$$n_\pm(A) = \dim(K_\pm)$$

são chamados de ***índices de deficiência*** *de A.*

Por definição, n_+ é o número de soluções linearmente independentes de

$$A^* x = ix, \tag{12.42}$$

ao passo que n_- é o número de soluções linearmente independentes de

$$A^* x = -ix \tag{12.43}$$

com $x \in D(A^*)$. Os índices de deficiência podem ser quaisquer inteiros não negativos; é ainda possível que n_+ ou n_- (ou ambos) sejam infinitos.

Exercício 12.5.1
Prove que $\text{Ran}(A \pm iI)^\perp = \text{Ker}(A^* \mp iI)$.

O Teorema 12.23 assegura que um operador simétrico fechado A é autoadjunto se e somente se os seus índices de deficiência são (0,0). Já se $n_+ = n_-$ o operador A possui extensões autoadjuntas parametrizadas pelas transformações unitárias U de K_+ em K_-. Por fim, se $n_+ \neq n_-$ o operador A não possui extensões autoadjuntas.

Teorema 12.29 (von Neumann) *Seja A um operador simétrico fechado com índices de deficiência n_+ e n_-. Então A tem extensões autoadjuntas se e somente se $n_+ = n_-$. Há uma correspondência biunívoca entre as extensões autoadjuntas de A e as transformações unitárias $U : K_+ \to K_-$. Explicitamente, cada extensão autoadjunta A_U de A tem domínio*

$$D(A_U) = \{x + y_+ + Uy_+ \mid x \in D(A) \text{ e } y_+ \in K_+\} \tag{12.44}$$

no qual atua segundo a regra

$$A_U(x + y_+ + Uy_+) = Ax + iy_+ - iUy_+ . \qquad 12.45$$

Demonstração. A prova deste teorema é consideravelmente longa e pode ser encontrada, por exemplo, em Reed & Simon (1975, Seção X.1); Akhiezer & Glazman (1963, Cap. VII); Lusternik & Sobolev (1974, Seção 7.7); Teschl (2009, Seção 2.6). ∎

Observação. Se A é simétrico, mas não necessariamente fechado, e seus índices de deficiência são $n_+ = n_- = 0$, então A é essencialmente autoadjunto em virtude do Teorema 12.23.

Este teorema de von Neumann é de capital importância porque não apenas caracteriza precisamente em que condições um operador simétrico admite extensões autoadjuntas, mas também fornece um método de construir as referidas extensões.

Antes de enveredar pelas aplicações do Teorema 12.29, consideremos um critério simples e útil, também devido a von Neumann, que assegura a existência de extensões autoadjuntas de um operador simétrico.

Definição 12.30 *Um operador $A : D(A) \to \mathscr{H}$ é **antilinear** se $A(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha} Ax + \overline{\beta} Ay$ para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $x, y \in D(A)$.*

Definição 12.31 *Um operador antilinear $C : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ é dito uma **conjugação** se $C^2 = I$ e, além disso, preserva normas, isto é, $||Cx|| = ||x||$ para todo $x \in \mathscr{H}$.*

Exercício 12.5.2
Dada uma conjugação C, prove que $\langle Cx, Cy \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.

Teorema 12.32 *Seja A um operador simétrico num espaço de Hilbert e suponha que existe uma conjugação C tal que $C : D(A) \to D(A)$ e $AC = CA$. Então A tem índices de deficiência iguais e, portanto, possui extensões autoadjuntas.*

Demonstração. Como $CD(A) \subset D(A)$ e $C^2 = I$, segue-se que $D(A) \subset CD(A)$, donde $CD(A) = D(A)$. Sejam $x_+ \in \mathscr{K}_+$ e $y \in D(A)$. Então, com o uso do Exercício 12.5.2,

$$0 = \overline{\langle (A^* - iI)x_+, y\rangle} = \overline{\langle x_+, (A + iI)y\rangle} = \langle Cx_+, C(A + iI)y\rangle$$
$$= \langle Cx_+, (A - iI)Cy\rangle = \langle (A^* + iI)Cx_+, Cy\rangle$$

para todo $y \in D(A)$. Como C é uma aplicação sobrejetiva de $D(A)$ em $D(A)$ e este domínio é denso, segue-se que $Cx_+ \in \mathscr{K}_-$, de modo que $C : \mathscr{K}_+ \to \mathscr{K}_-$. Analogamente, prova-se que $C : \mathscr{K}_- \to \mathscr{K}_+$. Como C é uma bijeção entre $\mathscr{K}_+$ e $\mathscr{K}_-$ que preserva normas, C mapeia conjuntos ortonormais de $\mathscr{K}_+$ em conjuntos ortonormais de $\mathscr{K}_-$ e vice-versa. Portanto, $n_+ = \dim \mathscr{K}_+ = \dim \mathscr{K}_- = n_-$ e a demonstração está completa. ∎

Exemplo 12.5.3

Seja $C : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ o operador antilinear definido por $C\psi = \overline{\psi}$. Verifica-se imediatamente que C é uma conjugação que comuta com

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

se V é uma função real localmente integrável. Portanto, H possui extensões autoadjuntas. Isto vale para um intervalo (a,b) finito ou infinito.

Vejamos, agora, algumas aplicações simples do Teorema 12.29 a situações de interesse físico.

Exemplo 12.5.4

Apliquemos o teorema de von Neumann 12.29 à determinação das extensões autoadjuntas do operador $P = -i d/dx$ em $L^2(0,1)$, já construídas no Exemplo 12.5.1. Vimos que $P^* g = -ig'$ para todo $g \in AC[0,1]$. As soluções de $P^* = \pm ig$ são $e^{\pm x}$ e ambas pertencem ao domínio de P^*. Portanto, $n_+ = n_- = 1$ porque $K_\pm$ são os espaços unidimensionais

$$K_+ = \{\alpha e^x \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \text{ e } K_- = \{\alpha e^{-x} \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Sejam

$$g_+ = \frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{e^2 - 1}} e^{-x}, \quad g_- = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2 - 1}} e^x$$

vetores normalizados de $K_\pm$. A única transformação unitária de K_+ em K_- é $Ug_+ = \gamma g_-$ com $|\gamma| = 1$. Portanto, os elementos do domínio de P_U são

$$g = f + \beta g_+ + \beta\gamma g_-, \quad f \in D(P) \text{ e } \beta \in \mathbb{C}.$$

Consequentemente, dado que $f(0) = f(1) = 0$,

$$g(0) = \frac{\beta\sqrt{2}(\gamma + e)}{\sqrt{e^2 - 1}} \text{ e } g(1) = \frac{\beta\sqrt{2}(1 + \gamma e)}{\sqrt{e^2 - 1}},$$

donde

$$g(1) = \frac{1 + \gamma e}{\gamma + e}\, g(0) = \alpha\, g(0) \text{ com } |\alpha| = \left|\frac{1 + \gamma e}{\gamma + e}\right| = 1.$$

Portanto, g obedece à condição de contorno (12.41) do Exemplo 12.5.1. Reciprocamente, se $g(1) = \alpha g(0)$ com $\alpha = e^{i\theta}$, então $g = f + \beta g_+ + \gamma\beta g_-$ para algum $\beta \in \mathbb{C}$ e $\gamma = (1 - \alpha e)/(\alpha - e)$. Conforme (12.45) temos

$$P_U g = -if' + i\beta g_+ - i\beta\gamma g_- = -ig',$$

de modo que $P_U = P_\theta$. Assim, o teorema de von Neumann fornece exatamente as mesmas extensões autoadjuntas obtidas diretamente no Exemplo 12.5.1.

Exercício 12.5.3

Reconsidere o Exemplo 12.5.2 e prove que $n_+ = 1$ e $n_- = 0$, o que confirma a inexistência de extensões autoadjuntas de P em $L^2(0,\infty)$. Indicação: com a mesma técnica utilizada no Exemplo 12.4.2 prova-se que $D(P^*) = H^1(0,\infty)$ e, neste domínio, $P^* = -i\,d/dx$.

Exemplo 12.5.5

Um operador que ocorre frequentemente na cosmologia quântica é $H^{(+)} = -d^2/dx^2$ em $L^2(0,\infty)$ com domínio

$$D(H^{(+)}) = \{f \in H^2(0,\infty) \,|\, f(0) = f'(0) = 0\}.$$

Neste domínio verifica-se imediatamente que $H^{(+)}$ é simétrico. Pelo método do Exemplo 12.4.2 prova-se que o domínio do adjunto é $D(H^{(+)*}) = H^2(0,\infty)$ e neste domínio $H^{(+)*}g = -g''$. Os índices de deficiência de $H^{(+)}$ são determinados pelas soluções de

$$-g'' = \pm i g.$$

As soluções linearmente independentes de $-g'' = ig$ são

$$\exp\left[\frac{(1-i)x}{\sqrt{2}}\right] \text{ e } \exp\left[-\frac{(1-i)x}{\sqrt{2}}\right], \qquad 12.46$$

das quais apenas a segunda pertence a $L^2(0,\infty)$, o que implica $n_+ = 1$. Analogamente, as soluções linearmente independentes de $-g'' = -ig$ são

$$\exp\left[\frac{(1+i)x}{\sqrt{2}}\right] \text{ e } \exp\left[-\frac{(1+i)x}{\sqrt{2}}\right], \qquad 12.47$$

mas apenas a segunda pertence a $L^2(0,\infty)$, de modo que $n_- = 1$ e $H^{(+)}$ possui extensões autoadjuntas. Sejam

$$g_+(x) = 2^{-1/4}\exp\left[-\frac{(1-i)x}{\sqrt{2}}\right] \text{ e } g_-(x) = 2^{-1/4}\exp\left[-\frac{(1+i)x}{\sqrt{2}}\right],$$

vetores normalizados de $K_\pm$. Assim como no exemplo anterior, a única transformação unitária de K_+ em K_- é a multiplicação por um número complexo γ com $|\gamma| = 1$. Então os elementos do domínio de $H_U^{(+)}$ são

$$g = f + \beta g_+ + \beta\gamma g_-, \ f \in D(H^{(+)}), \ \beta \in \mathbb{C}, \ |\gamma| = 1.$$

Como $g_+'' = -ig_+$ e $g_-'' = ig_-$, de (12.45) resulta

$$H_U^{(+)} g = H^{(+)} f + i\beta g_+ - i\beta\gamma g_- = -f'' - \beta g_+'' - \beta\gamma g_-'' = -g'',$$

de modo que $H_U^{(+)}$ age do mesmo modo que $H^{(+)}$ porém num domínio maior. A fim de caracterizar os domínios das extensões autoadjuntas de $H^{(+)}$ por condições de contorno, note que

$$g(0) = 2^{-1/4}\beta(1+\gamma), \ g'(0) = \frac{2^{-1/4}\beta}{\sqrt{2}}\left[-1 + i - (1+i)\gamma\right].$$

Se $\gamma = -1$ temos $g(0) = 0$ com $g'(0)$ arbitrário, ao passo que se $\gamma \neq -1$ temos

$$g'(0) = \frac{g(0)}{\sqrt{2}}\left[-i + i\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right] = \frac{\tan(\theta/2) - 1}{\sqrt{2}}g(0) \equiv ag(0), \quad a \in \mathbb{R},$$

onde $\gamma = e^{i\theta}$. Portanto, as extensões autoadjuntas $H_a^{(+)}$ de $H^{(+)}$, com $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ têm domínios

$$D(H_a^{(+)}) = \{f \in H^2(0,\infty) \mid f'(0) = af(0)\}$$

com $a \in \mathbb{R}$ e

$$D(H_\infty^{(+)}) = \{f \in H^2(0,\infty) \mid f(0) = 0\}.$$

Leituras Adicionais Selecionadas[4]

- Akhiezer, N. I. e Glazman, I. M. 1963 *Theory of Linear Operators in Hilbert Space.*

E. Prugovečki, E. 1981 *Quantum Mechanics in Hilbert Space.*

- Reed, M. e Simon, B. 1980 *Methods of Modern Mathematical Physics.* Vol. I: *Functional Analysis.*
- Reed, M. e Simon, B. 1975 *Methods of Modern Mathematical Physics.* Vol. II: *Fourier Analysis, Self-Adjointness.*

Teschl, G. 2009 *Mathematical Methods in Quantum Mechanics.*

Problemas

12.1. Num espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, seja A o operador definido por

$$Ax = \langle u,x\rangle v,$$

onde $u, v \in \mathscr{H} \setminus \{0\}$. (a) Prove que A é limitado e calcule sua norma. (b) Determine o adjunto de A.

4. A lista completa de referências, com plenos detalhes bibliográficos, encontra-se na Bibliografia no fim do livro. O símbolo • destaca obras cuja leitura é altamente recomendada.

12.2. Se U é um operador unitário, prove que $||U|| = 1$.

12.3. Um operador A num espaço de Hilbert é dito **normal** se $D(A) = D(A^*)$ e $||Af|| = ||A^* f||$ para qualquer f pertencente ao domínio comum de A e A^*. (a) Prove que todo operador normal é fechado. Sugestão: A^* é fechado. (b) Mostre que o núcleo de um operador fechado é fechado. (c) Mostre que se A é fechado e B é limitado, então AB é fechado.

12.4. Seja $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma base ortornormal de um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. O operador de aniquilação A é definido por

$$Ae_0 = 0, \quad Ae_n = \sqrt{n}\, e_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

(a) Mostre que A não é limitado e especifique o seu domínio. Mostre que esse domínio é denso em $\mathscr{H}$. (b) Prove que o adjunto de A é o operador definido por

$$A^* e_n = \sqrt{n+1}\, e_{n+1}$$

para todo n, chamado de operador de criação. Mostre que $D(A) = D(A^*)$. (c) Encontre um domínio em que o comutador $[A,A^*]$ esteja definido e prove que, nesse domínio, $[A,A^*] = I$.

12.5. Prove que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx = \pi \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4}\, dx = \frac{2\pi}{3}.$$

Sugestão: primeiro calcule a transformada de Fourier de $\chi_{[-1,1]}$, onde χ_A denota a função característica do conjunto A, definida pela Eq.(A.7) no Apêndice A; depois use $\mathscr{F}(f * f) = \sqrt{2\pi}(\mathscr{F}f)^2$.

12.6. Sejam A, B e $A+B$ operadores lineares densamente definidos no espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, de modo que A^*, B^* e $(A+B)^*$ existem. (a) Prove que $(A+B)^* \supset A^* + B^*$. (b) Se B é limitado e definido em todo o espaço de Hilbert, prove que $(A+B)^* = A^* + B^*$.

12.7. Prove que $\text{Ker}(A^* A) = \text{Ker}(A)$ se $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$.

12.8. Prove que se $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, então $x_n \xrightarrow{w} x$ implica $Ax_n \xrightarrow{w} Ax$. Sugestão: $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$.

12.9. Se A é um operador autoadjunto, prove que o operador $U = (A - iI)(A + iI)^{-1}$ é unitário. U é chamado de *transformada de Cayley* de A.

12.10. Mostre que a relação de comutação $[Q,P] = i\hbar I$ não pode ser satisfeita num espaço vetorial de dimensão finita. Sugestão: tome o traço.

12.11. Se V é um operador antilinear (vide Definição 12.30), seu adjunto é definido por $\langle V^* x, y\rangle = \overline{\langle x, Vy\rangle} = \langle Vy, x\rangle$. V é **antiunitário** se é antilinear, está definido em todo o espaço de Hilbert e $V^* V = VV^* = I$. (a) Prove que o adjunto de um operador antilinear também é um operador antilinear. (b) Prove que um operador antiunitário preserva o *módulo* do produto interno de dois vetores.

12.12. Seja K o operador de conjugação complexa, definido numa base ortonormal $\{e_n\}$ de um espaço de Hilbert por

$$K\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha_n}\, e_n .$$

Prove que todo operador antiunitário V pode ser escrito na forma $V = UK$, onde U é um operador unitário.

12.13. Sejam $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ com $\|T\| \le 1$.
(a) Um operador A definido em todo o espaço de Hilbert é positivo se $\langle x, Ax\rangle \ge 0$ para todo $x \in \mathscr{H}$. Prove que $I - T^* T$ é positivo.
(b) Seja $S = \sqrt{I - T^* T}$. Prove que $\|x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|Sx\|^2$ para todo $x \in \mathscr{H}$. Informação útil: a raiz quadrada de um operador autoadjunto positivo é um operador autoadjunto positivo.
(c) Prove que $\{x \in \mathscr{H} \,|\, \|x\| = \|Tx\|\} = \mathrm{Ker}(S)$.

12.14. Se $\{A_n\}$ é uma sequência de operadores limitados num espaço de Hilbert que converge uniformemente para o operador limitado A, prove que $\{A_n^*\}$ converge uniformemente para A^*.

12.15. Seja A um operador limitado num espaço de Hilbert. Prove que o operador $B = I + A^* A$ possui inverso.

12.16. Seja $\lambda = \{\lambda_n\}$ uma sequência de números complexos com $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| < \infty$ e considere o operador de multiplicação $A_\lambda : l^2 \to l^2$ definido por

$$A_\lambda(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) = (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \lambda_3\xi_3, \ldots).$$

(a) Prove que A_λ é limitado.
(b) Determine A_λ^* e prove que A_λ é autoadjunto se e somente se $\lambda_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(c) Prove que A_λ é positivo se e somente se $\lambda_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, determine $\sqrt{A_\lambda}$.

12.17. Seja $D(A)$ a coleção dos $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l^2$ com apenas um números finito dos ξ_k diferentes de zero e seja $A : D(A) \to l^2$ o operador definido por $Ax = (\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, \ldots, n\xi_n, \ldots)$. (a) Prove que A é simétrico. (b) Determine A^*, especificando o seu domínio. Verifique que A^* é uma extensão de A. (c) Prove que A^* é autoadjunto, ou seja, A é essencialmente autoadjunto.

12.18. Seja $V : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ o operador de multiplicação pela funcão contínua $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Prove que V^* é o operador de multiplicação por $\overline{v}$ e que V é autoadjunto se e somente se v é uma função real.

12.19. Dada a função contínua $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, considere o operador T em $L^2(\mathbb{R})$ definido por

$$(Tf)(x) = -i\frac{df}{dx}(x) + v(x)f(x)$$

no domínio

$$\mathrm{D}(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f \in AC(\mathbb{R}) \text{ e } (-if' + vf) \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Prove que T é autoadjunto mostrando que ele é unitariamente equivalente a $P = -id/dx$ com $\mathrm{D}(P) = \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$. Sugestão: o operador de multiplicação por $U(x) = e^{i\int_0^x v(t)dt}$ é unitário.

12.20. Seja $(a,b) \subset \mathbb{R}$ um intervalo qualquer e $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma bijeção diferenciável com $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$. Mostre que o mapeamento de $L^2(a,b)$ em $L^2(\mathbb{R})$ associado à mudança de variável $y = f(x)$ é realizado pelo operador unitário $U_f : L^2(a,b) \to L^2(\mathbb{R})$ definido por

$$U_f\psi = (f' \circ f^{-1})^{-1/2}\,\psi \circ f^{-1}.$$

Obtenha a forma explícita de $\tilde{\psi}(y) = (U_f\psi)(y)$ para $(a,b) = (0,\infty)$ e $f(x) = \ln x$.

12.21. Seja $T : L^2\big((0,1)^2\big) \to L^2\big((0,1)^2\big)$ definido por

$$(Tf)(x,y) = f\left(\frac{2x}{1+x}, \frac{2y}{1+y}\right).$$

(a) Prove que T é linear e limitado.
(b) Prove que T^* é dado por

$$(T^* f)(x,y) = \frac{4}{(2-x)^2(2-y)^2} f\left(\frac{x}{2-x}, \frac{y}{2-y}\right).$$

12.22. Se A é um operador autoadjunto, prove que A^2 é autoadjunto. Sugestões: (a) mostre que $A^2 + I = (A + iI)(A - iI)$ num domínio adequado; (b) combine os Teoremas 12.23 e 12.24.

12.23. Seja A um operador limitado definido em todo o espaço de Hilbert complexo $\mathscr{H}$ que satisfaz $\langle Ax,x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathscr{H}$. Prove que A é autoadjunto.

12.24. Dado um intervalo (a,b) finito ou infinito, seja $\mathbb{K}$ o operador linear definido em $L^2(a,b)$ por

$$(\mathbb{K}f)(x) = \int_a^b K(x,s)f(s)ds$$

com

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dxds < \infty.$$

(a) Prove que $\mathbb{K}$ é limitado. (b) Determine $\mathbb{K}^*$. (c) Prove que $\mathbb{K}$ é autoadjunto se e somente se

$$K(x,s) = \overline{K(s,x)}.$$

13

Espectro, Teorema Espectral e Dinâmica Quântica

De acordo com a Definição 12.2, se $x \neq 0$ pertence ao domínio do operador linear A e $Ax = ax$ com $a \in \mathbb{C}$, dizemos que x é um autovetor de A com autovalor a. O operador $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ com $\lambda \in \mathbb{C}$ não existe se λ é um autovalor de A. No caso de espaço vetorial complexo de dimensão finita, os autovalores sempre existem e constituem o espectro do operador, que é discreto e consiste num número finito de elementos. Em dimensão infinita a coisa muda de figura.

13.1 *Espectro de um Operador Linear*

Em dimensão infinita a vida é mais difícil mas, em compensação, bem menos enfadonha: o *operador resolvente* $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ pode ou não existir para todo λ; se existir, poderá ou não ser limitado, e seu domínio poderá ou não ser denso. Em vista destas possibilidades, e de longa experiência dos matemáticos com operadores de variados tipos, a seguinte definição revela-se adequada.

Definição 13.1 *Seja X um espaço normado sobre o corpo dos números complexos e $A : \mathrm{D}(A) \to X$ um operador linear, com $\mathrm{D}(A) \subset X$. O* ***conjunto resolvente*** *do operador A é o conjunto $\rho(A)$ de todos os números complexos λ tais que o* ***operador resolvente*** *$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ existe e é um operador limitado densamente definido, e cada $\lambda \in \rho(A)$ é dito um* ***valor regular*** *de A. Todos os demais pontos do plano complexo compreendem o* ***espectro*** *$\sigma(A)$ do operador A, isto é, $\sigma(A)$ é o complemento de $\rho(A)$ em $\mathbb{C}$.*

Note que λ pertence ao espectro de A se e somente se pelo menos uma das seguintes situações ocorre:

(i) $R_\lambda(A)$ não existe;

(ii) $R_\lambda(A)$ não é limitado;

(iii) $R_\lambda(A)$ não é densamente definido.

Com o advento da mecânica quântica, tornou-se claro que o espectro — no sentido físico do termo — é determinado pelo espectro — no sentido matemático do termo — dos operadores autoadjuntos associados às grandezas físicas relevantes. É assombroso que o termo "espectro" foi utilizado na Matemática por Hilbert sem nenhum pressentimento de que depois esse conceito encontraria aplicação à determinação dos espectros atômicos (Reid 1986).

É fácil ver que $R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1}$ não existe se e somente se λ é um autovalor de A. De fato, se λ é autovalor existe $x \neq 0$ tal que $(A-\lambda I)x = 0$, de modo que o operador $A-\lambda I$ não tem inverso. Reciprocamente, se $A-\lambda I$ não tem inverso é porque a aplicação $A-\lambda I : \mathrm{D}(A) \to \mathrm{Ran}(A-\lambda I)$ não é injetiva, isto é, existem vetores distintos x_1 e x_2 do domínio de A tais que $(A-\lambda I)x_1 = y$ e $(A-\lambda I)x_2 = y$ para algum $y \in \mathrm{Ran}(A-\lambda I)$, donde $(A-\lambda I)x = 0$ com $x = x_1 - x_2 \neq 0$, de modo que λ é autovalor de A.

Definição 13.2 *O conjunto dos autovalores de A, isto é, o conjunto dos números complexos λ para os quais $R_\lambda(A)$ não existe é chamado de* ***espectro pontual*** *ou* ***espectro discreto*** *de A, denotado por $\sigma_p(A)$. O conjunto dos números complexos λ para os quais $R_\lambda(A)$ existe, é densamente definido porém ilimitado é chamado de* ***espectro contínuo*** *de A e denotado por $\sigma_c(A)$. O conjunto dos números complexos λ para os quais $R_\lambda(A)$ existe mas não é densamente definido é chamado de* ***espectro residual*** *de A e denotado por $\sigma_r(A)$.*

Os espectros pontual, contínuo e residual também costumam ser denotados por $P\sigma(A)$, $C\sigma(A)$ e $R\sigma(A)$, respectivamente. Verifica-se sem dificuldade que os três espectros acima definidos são disjuntos entre si e compõem o espectro de A:

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Alguns dos espectros podem ser vazios. Para um operador linear definido num espaço vetorial de dimensão finita temos $\sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \varnothing$ e $\sigma(A) =$

$\sigma_p(A)$. A presente terminologia, apesar de largamente adotada, não é das mais felizes, pois o espectro pontual não é necessariamente enumerável e o espectro contínuo pode ser enumerável ou até mesmo finito.

Quando o espaço normado X é um espaço de Hilbert, um teorema útil para a determinação do espectro resulta de algumas observações simples e afirma que, para um operador limitado, o espectro do adjunto é o complexo conjugado do espectro do operador.

Teorema 13.3 *Se A é um operador linear limitado num espaço de Hilbert, então o espectro de A^* é o complexo conjugado do espectro de A. Mais precisamente,* $\sigma(A^*) = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A)\}$.

Demonstração. Se $\lambda \in \rho(A)$ o Teorema 12.11 fornece $\big((A-\lambda I)^*\big)^{-1} = \big((A-\lambda I)^{-1}\big)^*$, donde se conclui que $R_{\overline{\lambda}}(A^*) = R_\lambda(A)^*$. Portanto, $\lambda \in \rho(A)$ se e somente se $\overline{\lambda} \in \rho(A^*)$ e, consequentemente, $\lambda \in \sigma(A)$ se e somente se $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$. ∎

Exemplo 13.1.1

Reconsideremos o operador de translação T em l^2 definido no Exemplo 12.2.1. Para que $\lambda \in \mathbb{C}$ seja um autovalor de T é preciso que exista um vetor não nulo $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ pertencente a l^2 tal que

$$Tx = \lambda x \implies (0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3, \ldots).$$

Isto exige

$$\lambda\alpha_1 = 0,\ \lambda\alpha_2 = \alpha_1,\ \lambda\alpha_3 = \alpha_2,\ \ldots .$$

Quer seja $\lambda = 0$ ou $\lambda \neq 0$, a única solução é $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$. Portanto, $x = 0$ e T não possui autovalores. Para $\lambda = 0$ o operador resolvente T^{-1} : $\mathrm{Ran}(T) \to l^2$ existe mas o seu domínio não é denso em l^2 porque o vetor $e_1 = (1,0,0,\ldots)$ é ortogonal a todos os elementos de $D(T^{-1}) = \mathrm{Ran}(T)$. Portanto, $\lambda = 0$ pertence ao espectro residual de T. Vejamos, agora, se T^* (determinado no Exemplo 12.2.1) possui autovalores. Devemos ter

$$T^*x = \lambda x \ \text{ ou } \ (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3, \ldots),$$

o que implica

$$\alpha_2 = \lambda\alpha_1,\ \alpha_3 = \lambda\alpha_2,\ \alpha_4 = \lambda\alpha_3,\ \ldots .$$

Portanto, $\alpha_n = \lambda^{n-1}\alpha_1$ e os autovetores

$$\alpha_1(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots)$$

pertencem a l^2 se e somente se $|\lambda| < 1$. O espectro pontual de T^* é um conjunto contínuo, o disco aberto de raio unitário centrado na origem do plano complexo: $\sigma_p(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda| < 1\}$. Pelo Teorema 13.3, este disco também faz parte do espectro de T, isto é, $\sigma(T) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda| < 1\}$. Não tentaremos determinar os espectros de T e T^* de forma completa.

Exemplo 13.1.2

Seja $X = C[0,1]$, isto é, o conjunto das funções complexas contínuas em $[0,1]$ com a norma do supremo, e considere o operador linear $A : X \to X$ definido por

$$(Af)(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Comecemos pela busca dos possíveis autovalores de A, isto é, de soluções não triviais da equação homogênea

$$\int_0^x f(t) = \lambda f(x). \tag{13.1}$$

Esta igualdade mostra que f é diferenciável e satisfaz $\lambda f'(x) = f(x)$. Se $\lambda \neq 0$ resulta $f(x) = Ce^{x/\lambda}$ com $C = 0$ porque a equação (13.1) exige $f(0) = 0$. Portanto $f = 0$ e $\lambda \neq 0$ não é autovalor. Se $\lambda = 0$ segue-se imediatamente de $\lambda f'(x) = f(x)$ que $f = 0$. Logo, $\lambda = 0$ também não é autovalor e o espectro pontual de A é vazio. Assim, o operador resolvente existe para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e devemos examinar suas propriedades, isto é, a natureza das soluções para f da equação

$$(A - \lambda I)f = g \quad \text{ou} \quad \int_0^x f(t)\,dt - \lambda f(x) = g(x) \tag{13.2}$$

com $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f, g \in C[0,1]$. Consideremos primeiramente $\lambda = 0$. Note que o domínio de A é o espaço inteiro, mas se $g \in \text{Ran}(A)$ segue-se que g é diferenciável com $g(0) = 0$. Claramente, a única solução de $Af = g$ é

$f = g'$ para cada $g \in \text{Ran}(A)$. Mas $D(A^{-1}) = \text{Ran}(A)$ não é denso em $C[0,1]$ porque a função constante $f(x) \equiv 1$ pertence a $C[0,1]$ mas, para qualquer $g \in \text{Ran}(A)$,

$$\|f - g\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |1 - g(x)| \geq 1$$

porque $g(0) = 0$. Portanto, $0 \in \sigma_r(A)$. Com $\lambda \neq 0$ a equação (13.2) nos informa que $\lambda f + g$ é diferenciável, $\lambda f(0) + g(0) = 0$ e $(\lambda f + g)' = f$. Suponhamos, temporariamente, que f e g sejam separadamente diferenciáveis. Notando que $e^{x/\lambda}(e^{-x/\lambda} f(x))' = f'(x) - \lambda^{-1} f(x)$, uma solução de $\lambda f' + g' = f$ é facilmente obtida na forma

$$f(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{x/\lambda} \int_0^x e^{-t/\lambda} g'(t) dt. \tag{13.3}$$

Uma integração por partes com $g(0) = 0$, já que (13.3) implica $f(0) = 0$, fornece

$$f(x) = -\frac{g(x)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^x e^{\frac{x-t}{\lambda}} g(t) dt. \tag{13.4}$$

Nesta forma de expressar f não é necessário supor que g seja uma função diferenciável nem que $f(x)$ e $g(x)$ anulem-se separadamente em $x = 0$, pois temos automaticamente $\lambda f(0) + g(0) = 0$, como deve ser. Resta confirmar que (13.4) é mesmo solução de (13.2). Substituindo (13.4) em (13.2) resulta

$$(A - \lambda I) f(x) = \int_0^x f(t) dt - \lambda f(x)$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \int_0^x g(t) dt - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^x dt \int_0^t e^{\frac{t-t'}{\lambda}} g(t') dt' + g(x) + \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\frac{x-t}{\lambda}} g(t) dt. \tag{13.5}$$

Com $G(t) = \int_0^t e^{-t'/\lambda} g(t') dt'$ podemos fazer uma integração por partes para obter

$$\int_0^x dt \int_0^t e^{(t-t')/\lambda} g(t') dt' = \int_0^x G(t) e^{t/\lambda} dt$$

$$= \lambda e^{t/\lambda} G(t) \Big|_0^x - \lambda \int_0^x e^{t/\lambda} G'(t) dt$$

$$= \lambda e^{x/\lambda} G(x) - \lambda \int_0^x e^{t/\lambda} e^{-t/\lambda} g(t) dt$$

$$\int_0^x dt \int_0^t e^{(t-t')/\lambda} g(t')dt' = \lambda e^{x/\lambda} \int_0^x e^{-t/\lambda} g(t)dt - \lambda \int_0^x g(t)dt.$$

A substituição deste resultado em (13.5) conduz a $(A - \lambda I)f = g$, o que conclui a verificação. Podemos, portanto, escrever

$$R_\lambda(A)g(x) = -\frac{g(x)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^x e^{\frac{x-t}{\lambda}} g(t)dt, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \qquad 13.6$$

Como se vê desta equação, $R_\lambda(A)$ está definido para todo $g \in C[0,1]$ e é um operador limitado:

$$\begin{aligned} \|R_\lambda(A)g\| &= \sup_{x\in[0,1]} |R_\lambda(A)g(x)| \\ &\leq \frac{\|g\|}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|^2}\|g\| \int_0^x e^{\frac{(\mathrm{Re}\lambda)(x-t)}{|\lambda|^2}} dt \\ &\leq \frac{\|g\|}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|^2}\|g\| \int_0^1 e^{\frac{|\mathrm{Re}\lambda|}{|\lambda|^2}} dt = C\|g\| \end{aligned}$$

com

$$C = \frac{1}{|\lambda|^2}\left[|\lambda| + e^{\frac{|\mathrm{Re}\lambda|}{|\lambda|^2}}\right].$$

Por conseguinte, todos os números complexos diferentes de zero estão no conjunto resolvente de A. Conclusão: $\sigma(A) = \sigma_r(A) = \{0\}$.

ESPECTRO DE OPERADOR AUTOADJUNTO

A definição de espectro de um operador linear substitui a noção habitual de espectro como a coleção dos autovalores, aplicável somente no caso de operadores lineares em espaços vetoriais de dimensão finita. Se o operador é autoajunto, seu espectro goza de diversas propriedades importantes, que passamos a descrever.

Teorema 13.4 *O espectro de um operador autoadjunto A contém somente números reais. Reciprocamente, se A é um operador simétrico fechado e $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, então A é autoadjunto.*

Demonstração. Pelo Exercício 12.1.1, se A é autoadjunto o número $\lambda = a + ib$ com a e b reais e $b \neq 0$ não pode ser um autovalor de A, de modo que $(A - \lambda I)^{-1}$ existe. Dado $x \in D(A)$ e escrevendo $y = (A - \lambda I)x$ resulta

$$\begin{aligned}\|y\|^2 &= \langle (A-aI)x - ibx, (A-aI)x - ibx\rangle \\ &= \|(A-aI)x\|^2 - ib\langle (A-aI)x, x\rangle + ib\langle x,(A-aI)x\rangle + |b|^2\|x\|^2 \\ &= \|(A-aI)x\|^2 + |b|^2\|x\|^2\end{aligned}$$

porque $(A-aI)^* = A^* - aI = A - aI$ para $a \in \mathbb{R}$. Deste resultado conclui-se que $\|y\| \geq |b|\,\|x\|$, ou seja,

$$\|x\| = \|(A-\lambda I)^{-1}y\| \leq \frac{1}{|b|}\|y\|,$$

o que prova que $(A-\lambda I)^{-1}$ é limitado. Para provar que $\overline{D\big((A-\lambda I)^{-1}\big)} = \overline{\mathrm{Ran}(A-\lambda I)} = \mathscr{H}$, basta verificar que o único vetor pertencente a $\mathrm{Ran}(A-\lambda I)^{\perp}$ é o vetor nulo. Se $y \in \mathrm{Ran}(A-\lambda I)^{\perp}$, então

$$\begin{aligned}0 &= \langle y,(A-\lambda I)x\rangle \\ &= \langle (A^* - \overline{\lambda} I)y, x\rangle \\ &= \langle (A-\overline{\lambda} I)y, x\rangle \quad \forall x \in D(A).\end{aligned}$$

Como $D(A)$ é denso, $(A-\overline{\lambda} I)y = 0$ e $y = 0$ pois todos os autovalores de A são reais. Portanto, $\overline{\mathrm{Ran}(A-\lambda I)} = \mathscr{H}$ e o domínio do operador resolvente é denso. Assim, se $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ então $\lambda \notin \sigma(A)$, de modo que o espectro de A só contém números reais. Reciprocamente, se $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ segue-se que $\pm i \in \rho(A)$, de modo que $(A \pm iI)^{-1}$ são operadores limitados densamente definidos, e seus domínios podem ser estendidos ao espaço de Hilbert inteiro se A é fechado — Exercício 13.1.1 abaixo. Neste caso, $\mathrm{Ran}(A \pm iI) = \mathscr{H}$ e, se é simétrico, A é autoadjunto pelo Teorema 12.23. ∎

Exercício 13.1.1
Prove que a equação $ABx = x$ para x num domínio denso pode ser estendida ao espaço de Hilbert inteiro se B é limitado e A é fechado.

Teorema 13.5 *O número real λ é um autovalor do operador autoadjunto A se e somente se $\overline{D(R_\lambda(A))} \neq \mathscr{H}$.*

Demonstração. Se λ é um autovalor de A, existe $x \neq 0$ em $D(A)$ tal que $Ax = \lambda x$. Portanto, para qualquer $y \in D(A)$,

$$\langle x, (A-\lambda I)y\rangle = \langle (A-\lambda I)x, y\rangle = 0,$$

isto é, $x \neq 0$ e $x \perp \mathrm{D}(R_\lambda(A)) = \mathrm{Ran}(A - \lambda I)$. Segue-se que $\overline{\mathrm{D}(R_\lambda(A))} \neq \mathscr{H}$. Reciprocamente, se $\overline{\mathrm{D}(R_\lambda(A))} \neq \mathscr{H}$ então existe um vetor $x \neq 0$ tal que $x \perp \mathrm{Ran}(A - \lambda I)$, ou seja,

$$\langle x, (A - \lambda I)y\rangle = 0 = \langle 0, y\rangle$$

para todo $y \in \mathrm{D}(A)$. Resulta que $x \in \mathrm{D}((A - \lambda I)^*) = \mathrm{D}(A^*) = \mathrm{D}(A)$ e $(A^* - \lambda I)x = 0$. Como $A^* = A$, segue-se que x é autovetor de A com autovalor λ. ∎

Teorema 13.6 *O espectro de um operador autoadjunto é fechado.*

Demonstração. Basta mostrar que $\rho(A)$ é um conjunto aberto. Seja $\lambda_0 \in \rho(A)$. Como $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ é limitado, existe $k > 0$ tal que

$$||Ax - \lambda_0 x|| \geq k||x||$$

para todo $x \in \mathrm{D}(A)$. Se $|\lambda - \lambda_0| < k/2$ e $x \in \mathrm{D}(A)$,

$$||Ax - \lambda_0 x|| = ||Ax - \lambda x + (\lambda - \lambda_0)x|| \leq ||Ax - \lambda x|| + \frac{k}{2}||x||,$$

donde

$$||Ax - \lambda x|| \geq \frac{k}{2}||x||.$$

Portanto, $\lambda \in \rho(A)$ porque $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ é limitado e, como λ não é autovalor de A, o domínio de $R_\lambda(A)$ é denso pelo Teorema 13.5.

Definição 13.7 *O operador autoadjunto* $A : \mathrm{D}(A) \to \mathscr{H}$ *é* ***positivo*** *se* $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ *para todo* $x \in \mathrm{D}(A)$.

Teorema 13.8 *Se A é um operador autoadjunto positivo,* $\sigma(A) \subset [0, \infty)$.

Demonstração. Seja $\lambda < 0$. É imediato que o operador autoadjunto positivo A não pode ter autovalores negativos. Segue-se que $(A - \lambda I)^{-1}$ existe e seu domínio é denso pelo Teorema 13.5, bastando provar que ele é limitado para que se tenha $\lambda \in \rho(A)$. Para todo $x \in \mathrm{D}(A)$ temos $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ e, consequentemente,

$$\langle x, (A - \lambda I)x\rangle = \langle x, Ax\rangle - \lambda\langle x, x\rangle \geq |\lambda|\,||x||^2.$$

Com o emprego da desigualdade de Schwarz deduz-se

$$|\lambda|\,||x||^2 \leq \langle x, (A - \lambda I)x\rangle \leq ||(A - \lambda I)x||\,||x|| \implies ||(A - \lambda I)x|| \geq |\lambda|\,||x||,$$

e isto mostra que $(A - \lambda I)^{-1}$ é limitado. ∎

Corolário 13.9 *Se $a \in \mathbb{R}$ e $A - aI$ é um operador autoadjunto positivo, $\sigma(A) \subset [a,\infty)$.*

Teorema 13.10 *O espectro residual de um operador autoadjunto é vazio.*

Demonstração. Se A é um operador autoadjunto e $\lambda \in \sigma_r(A)$ então o operador resolvente $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ existe mas seu domínio $D(R_\lambda(A))$ não é denso. Segue-se do Teorema 13.5 que λ é um autovalor de A. Mas nenhum autovalor pertence a $\sigma_r(A)$. Esta contradição prova que o espectro residual de A é vazio. ∎

Os Teoremas 13.4 e 13.8 são resultados fundamentais para a mecânica quântica. Um dos postulados da teoria quântica afirma que qualquer grandeza física mensurável é representada por um operador autoadjunto. Como também postula-se que os únicos resultados possíveis da medição de uma grandeza física são os elementos do espectro do operador correspondente, resulta que qualquer grandeza física só pode assumir valores reais, e grandezas físicas positivas só podem assumir valores positivos. O Teorema 13.10 estabelece que os resultados de uma medição pertencem necessariamente ao espectro pontual ou ao espectro contínuo do operador associado à grandeza medida. Além disso, como todo operador simétrico pode ser considerado fechado porque admite uma extensão fechada, a segunda parte do Teorema 13.4 mostra que não basta que um operador seja simétrico para que possa representar uma quantidade física na mecânica quântica. Uma vez aceito o postulado de que os valores que uma grandeza física mensurável pode assumir coincidem com o espectro do operador associado, somente operadores autoadjuntos podem representar grandezas mensuráveis.

Exercício 13.1.2
Sejam A e B operadores num espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ e $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ um operador unitário. Se $B = UAU^{-1}$, prove que $\sigma(B) = \sigma(A)$.

Operador com Base Ortonormal de Autovetores

Nos textos de mecânica quântica costuma-se supor ou postular que a cada grandeza física mensurável corresponde um *observável*, isto é, um operador

autoadjunto[1] cujos autovetores formam uma base ortonormal do espaço de estados. Isto é impossível, em geral, pois, como já veremos, há operadores autoadjuntos associados a grandezas físicas de fundamental importância que não possuem autovetores. A recíproca é que é verdadeira: se existe uma base ortonormal constituída por autovetores de um operador simétrico, o referido operador é autoadjunto em seu domínio natural.

Teorema 13.11 *Seja A um operador simétrico num espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Se existe uma base ortonormal $\{e_n\}$ de $\mathscr{H}$ composta por autovetores de A, isto é, $Ae_n = \lambda_n e_n$, então A é autoadjunto no domínio*

$$\mathrm{D}(A) = \left\{ x \in \mathscr{H} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle e_n, x\rangle|^2 < \infty \right\}. \qquad 13.7$$

Se o conjunto dos autovalores de A não possui ponto de acumulação, o espectro de A consiste na coleção de seus autovalores.

Demonstração. Seja $\{e_n\}$ uma base ortonormal constituída de autovetores do operador simétrico A, de modo que $Ae_n = \lambda_n e_n$ com $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Temos $y \in \mathrm{D}(A^*)$ se existe $y_* \in \mathscr{H}$ tal que $\langle y_*, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ para todo x no domínio (13.7), que é denso porque contém todas as combinações lineares finitas de elementos de $\{e_n\}$. Decompondo x, y e y_* na base $\{e_n\}$ é imediato que $\langle e_n, y_*\rangle = \lambda_n \langle e_n, y\rangle$, donde $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle e_n, y\rangle|^2 = \|y_*\|^2 < \infty$, de modo que $y \in \mathrm{D}(A)$. Segue-se que A é autoadjunto.

Seja λ um número real distinto de todos os autovalores. Se o conjunto dos autovalores de A não possui ponto de acumulação, existe $\epsilon > 0$ tal que $|\lambda - \lambda_n| > \epsilon$ para todo n. Consequentemente,

$$(A - \lambda I)^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle e_n, x\rangle}{\lambda_n - \lambda} e_n$$

pertence a $\mathscr{H}$ qualquer que seja $x \in \mathscr{H}$ porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle e_n, x\rangle|^2}{|\lambda_n - \lambda|^2} < \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2 = \frac{\|x\|^2}{\epsilon^2} < \infty.$$

1. Ou hermitiano, na terminologia dos físicos, que é ambígua porque não faz distinção entre operador meramente simétrico e operador autoadjunto.

Portanto, $\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leq \epsilon^{-1}$ e $(A-\lambda I)^{-1}$ é um operador limitado definido em todo o espaço de Hilbert, de modo que λ não pertence ao espectro de A. ∎

Exemplo 13.1.3

O operador hamiltoniano do oscilador harmônico unidimensional é

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2,$$

definido num domínio inicial $D(H) = \mathscr{S}(\mathbb{R})$, onde $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ é o espaço de Schwartz das funções infinitamente diferenciáveis de decréscimo rápido, que é denso em $L^2(\mathbb{R})$. Uma integração por partes estabelece facilmente que H é simétrico. Como é sabido (Courant & Hilbert 1953; Boccara 1990) que as autofunções de H formam uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, o operador H é autoadjunto no seu domínio natural. Além disso, o conjunto dos autovalores de H é $\{(n+1/2)\hbar\omega\}_{n=0}^{\infty}$, que não possui nenhum ponto de acumulação. Logo, o espectro do operador hamiltoniano do oscilador harmônico é composto exclusivamente por seus autovalores.

Sequências de Weyl e Determinação do Espectro

A determinação do espectro de um operador é, em geral, uma tarefa difícil. Para operadores autoadjuntos há um critério muito útil para a caracterização do espectro.

Teorema 13.12 *Seja A um operador autoadjunto. Um número real λ pertence ao espectro de A se e somente se existe uma sequência (x_n) de elementos do domínio de A tal que*

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda I)x_n\| = 0. \qquad 13.8$$

Uma sequência (x_n) com estas propriedades é chamada de ***sequência de Weyl****.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência em $D(A)$ que satisfaz (13.8) e suponha que $\lambda \in \rho(A)$. Neste caso, $R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1}$ é um operador limitado e

$$\|x_n\| = \|R_\lambda(A)(A-\lambda I)x_n\| \leq \|R_\lambda(A)\|\,\|(A-\lambda I)x_n\| \to 0 \text{ para } n\to\infty,$$

em contradição com $\|x_n\| = 1$. Portanto, não se pode ter $\lambda \in \rho(A)$ e, por definição de espectro, $\lambda \in \sigma(A)$.

Reciprocamente, se $\lambda \in \sigma(A)$ há duas possibilidades: (a) λ é autovalor de A; (b) $(A-\lambda I)^{-1}$ existe mas não é limitado. No caso (a) basta tomar a sequência $x_n = x$ com $||x|| = 1$ e $Ax = \lambda x$. No caso (b), existe uma sequência (y_n), $y_n \in D((A-\lambda I)^{-1})$, $||y_n|| = 1$ tal que

$$||(A-\lambda I)^{-1} y_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Seja (x_n) a sequência definida por

$$x_n = \frac{(A-\lambda I)^{-1} y_n}{||(A-\lambda I)^{-1} y_n||}.$$

Segue-se que $x_n \in D(A)$, $||x_n|| = 1$ e

$$||(A-\lambda I)x_n|| = \frac{||y_n||}{||(A-\lambda I)^{-1} y_n||} = \frac{1}{||(A-\lambda I)^{-1} y_n||} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

o que completa a demonstração. ∎

Esta é um propriedade notável de qualquer operador autoadjunto: cada elemento do seu espectro é aproxidadamente um autovalor. Intuitivamente, tudo se passa como se a sequência (x_n) do Teorema 13.12 convergisse para um autovetor de A com autovalor λ. Apesar do seu valor heurístico, esta interpretação não pode ser levada ao pé da letra porque o operador A pode não possuir autovalores.

Exemplo 13.1.4

Espectro do operador de posição Q em $L^2(\mathbb{R})$. Comecemos buscando os autovalores de Q. Para que $\lambda \in \mathbb{R}$ seja autovalor de Q precisamos ter

$$Qf = \lambda f \Longrightarrow (Qf)(x) = xf(x) = \lambda f(x) \quad \text{com} \quad f \in D(Q),$$

o que requer $f(x) = 0$ exceto se $x = \lambda$. Consequentemente, $f(x) = 0$ exceto num conjunto de medida nula e f é o vetor nulo de $L^2(\mathbb{R})$. Conclui-se que o operador Q não possui autovalores: $\sigma_p(Q) = \varnothing$. Os físicos gostam de dizer que $\delta_\lambda(x) = \delta(x-\lambda)$ é autofunção de Q com autovalor λ, mas isto é incorreto porque $\delta_\lambda \notin L^2(\mathbb{R})$. Trata-se de um erro benigno, no entanto, pois sugere um meio de encontrar o espectro de Q: é plausível que uma

sequência de elementos do domínio de Q que convirja pontualmente para uma função concentrada em $x = \lambda$ preencha as condições do Teorema 13.12. De fato, cada elemento da sequência

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{2}} & \text{se } |x-\lambda| < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } |x-\lambda| \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

pertence a D(Q) e satisfaz $\|f_n\| = 1$. Além disso,

$$\|(Q-\lambda I)f_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |(Q-\lambda I)f_n(x)|^2 dx = \int_{\lambda-1/n}^{\lambda+1/n} (x-\lambda)^2 \frac{n}{2} dx = \frac{1}{3n^2}$$

donde

$$\|(Q-\lambda I)f_n\| = \frac{1}{\sqrt{3}\,n} \to 0 \ \text{ para } \ n \to \infty.$$

Como λ é um número real arbitrário, segue-se do Teorema 13.12 que o espectro de Q consiste na totalidade dos números reais: $\sigma(Q) = \mathbb{R}$.

Exemplo 13.1.5

Espectro do operador $P = -i d/dx$ em $L^2(\mathbb{R})$. O número real λ será autovalor de P desde que

$$Pf = \lambda f \Longrightarrow -if'(x) = f(x) \Longrightarrow f(x) = \alpha e^{i\lambda x} \ \text{ com } \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Acontece que $e^{i\lambda x}$ não pertence ao domínio de P porque nem sequer pertence ao espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$: o operador P não tem autovalores. Embora seja incorreto afirmar que P tem autovalores, novamente a intuição física serve de guia para a determinação do espectro de P. Se multiplicarmos a onda plana $e^{i\lambda x}$ por uma sequência de funções de quadrado integrável que tendam a se tornar constantes num intervalo em torno da origem de largura ilimitada, é de se esperar que a sequência assim obtida satisfaça as condições do Teorema 13.12. Consideremos, portanto, a sequência

$$f_n(x) = (n\sqrt{\pi})^{-1/2} e^{i\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2n^2}}$$

formada por elementos do domínio de P tais que $\|f_n\| = 1$. Segue-se que

$$(P - \lambda I) f_n(x) = -i f_n'(x) - \lambda f_n(x) = (n\sqrt{\pi})^{-1/2} \frac{ix}{n^2} e^{i\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2n^2}},$$

donde, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|(P - \lambda I) f_n\|^2 = \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \frac{1}{n^4} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{n^2}} dx$$
$$= \frac{1}{n^2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \frac{1}{2n^2} \to 0 \text{ para } n \to \infty.$$

Pelo Teorema 13.12, $\sigma(P) = \mathbb{R}$.

Exercício 13.1.3

Considere os operadores P_θ em $L^2(-a,a)$ definidos no Exemplo 12.5.1, com $D(P_\theta)$ dado por (12.41). (a) Mostre que os autovetores normalizados de P_θ são

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{i(n\pi + \frac{\theta}{2})\frac{x}{a}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

com os correspondentes autovalores $\lambda_n = (n\pi + \theta/2)/a$. (b) No caso de condições de contorno antiperiódicas ($\theta = \pi$), mostre que o estado fundamental do operador hamiltoniano $H = P_\theta^2/2m$ é duplamente degenerado. Isto dá lugar ao fenômeno de quebra espontânea de simetria (Capri 1977; 2002, Seção 6.8), que desempenha um papel muito importante na física das partículas elementares. (c) Prove que o espectro de P_θ consiste somente nos seus autovalores.

Exemplo 13.1.6

Espectro do operador $H_0 = -d^2/dx^2$ em $L^2(\mathbb{R})$ — operador hamiltoniano da partícula livre em uma dimensão em unidades tais que $\hbar^2/2m = 1$ — no domínio $D(H_0) = \mathrm{H}^2(-\infty,\infty)$. Uma integração por partes, levando em conta o Lema 12.22, mostra que H_0 é um operador positivo:

$$\langle \psi, H_0 \psi \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(x)} \psi''(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx \geq 0 \quad \forall \psi \in D(H_0).$$

Pelo Teorema 13.8, $\sigma(H_0) \subset [0,\infty)$ e os eventuais autovalores são necessariamente não negativos. Se $\lambda > 0$ for um autovalor, devemos ter

$$-\psi''(x) = \lambda\psi .$$

As soluções linearmente independentes desta equação são $e^{i\gamma x}$ e $e^{-i\gamma x}$, com $\gamma = \sqrt{\lambda}$. Como nenhuma das duas é de quadrado integrável, H_0 não tem autovalores. Mas podemos buscar autofunções aproximadas escrevendo, como no Exemplo 13.1.5,

$$\psi_n(x) = n^{-1/2}\phi\left(\frac{x}{n}\right)e^{i\gamma x}, \; \phi(x) = \pi^{-1/4}e^{-x^2/2}, \; \|\phi\| = 1, \; \|\psi_n\| = 1.$$

Temos

$$H_0\psi_n - \gamma^2\psi_n = -\psi_n'' - \gamma^2\psi_n = -2i\gamma n^{-3/2}\phi'\left(\frac{x}{n}\right)e^{i\gamma x} - n^{-5/2}\phi''\left(\frac{x}{n}\right)e^{i\gamma x},$$

donde

$$\begin{aligned}\|(H_0 - \lambda I)\psi_n\| &\le 2\gamma n^{-3/2}\|\phi'\left(\frac{x}{n}\right)\| + n^{-5/2}\|\phi''\left(\frac{x}{n}\right)\| \\ &= 2\gamma n^{-1/2}\|\phi'\| + n^{-3/2}\|\phi''\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 13.12, todo $\lambda > 0$ pertence ao espectro de H_0. Como o espectro é fechado, conclui-se que $\sigma(H_0) = [0,\infty)$.

13.2 *Operadores de Projeção*

Dada uma variedade linear fechada M, considere o operador linear E_{M} definido da seguinte maneira: decompondo $x \in \mathscr{H}$ na forma $x = x_{\mathsf{M}} + x_{\mathsf{M}^\perp}$, com $x_{\mathsf{M}} \in \mathsf{M}$ e $x_{\mathsf{M}^\perp} \in \mathsf{M}^\perp$,

$$E_{\mathsf{M}}x = x_{\mathsf{M}}, \tag{13.9}$$

isto é, E_{M} projeta ortogonalmente o vetor x sobre M. Claramente, E_{M} está definido em todo o espaço de Hilbert e é um operador linear limitado:

$$\|E_{\mathsf{M}}x\| = \|x_{\mathsf{M}}\| \le \|x\| \tag{13.10}$$

porque $\|x\|^2 = \|x_{\mathsf{M}}\|^2 + \|x_{\mathsf{M}^\perp}\|^2$. Exceto se $\mathsf{M} = \{0\}$, caso em que $E_{\mathsf{M}} = 0$, temos

sempre $\|E_M\| = 1$ porque se $x \in M$ e $x \neq 0$ resulta $\|E_M x\| = \|x\|$. Além disso, o operador E_M é **idempotente**, isto é, satisfaz $E_M^2 = E_M$ pois

$$E_M^2 x = E_M E_M x = E_M x_M = x_M = E_M x \quad \forall x \in \mathscr{H} . \tag{13.11}$$

Por fim, E_M é autoadjunto já que $D(E_M) = \mathscr{H}$ e E_M é simétrico:

$$\langle y, E_M x\rangle = \langle y, x_M\rangle = \langle y_M, x_M\rangle = \langle y_M, x\rangle = \langle E_M y, x\rangle \quad \forall x, y \in \mathscr{H} . \tag{13.12}$$

Isto motiva a seguinte definição geral de operador de projeção ortogonal ou projetor.

Definição 13.13 *Um operador linear E definido em todo o espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ é um **operador de projeção ortogonal** ou **projetor** se é autoadjunto e idempotente, isto é, $E = E^*$ e $E^2 = E$.*

Esta definição é adequada porque a variedade linear sobre a qual um projetor projeta é fechada. De fato, seja M o conjunto de vetores $x \in \mathscr{H}$ que satisfazem $x = Ex$. Basta provar que se (x_n) é uma sequência de elementos de M que converge para x, então $x \in M$. Se $x_n \to x$, de

$$\|Ex - x_n\| = \|Ex - Ex_n\| \leq \|E\| \, \|x - x_n\| \to 0 \text{ para } n \to \infty$$

decorre que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = Ex ,$$

de modo que $x \in M$. Note que usamos o teorema de Hellinger-Toeplitz, segundo o qual um operador simétrico definido sobre todo o espaço de Hilbert é limitado.

Se E_1 e E_2 são operadores de projeção sobre as variedades lineares fechadas M_1 e M_2, respectivamente, dizemos que E_1 e E_2 são ortogonais se M_1 e M_2 são ortogonais. Neste caso, $E_1 E_2 = E_2 E_1 = 0$. Se $M_1 \subset M_2$ escrevemos $E_1 \leq E_2$. Neste caso, $E_1 E_2 = E_2 E_1 = E_1$.

13.3 *Decomposição Espectral de Operadores Autoadjuntos*

Num espaço vetorial de dimensão finita n, um operador autoadjunto A possui n autovalores $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ e existe uma base ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

do referido espaço vetorial constituída pelos autovetores correspondentes (supomos não haver degenerescência dos autovalores apenas para simplificar a discussão). Seja Λ_k o projetor sobre o subespaço gerado pelo autovetor v_k associado ao autovalor a_k, isto é,

$$v = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l v_l \Longrightarrow \Lambda_k v = \alpha_k v_k . \tag{13.13}$$

Claramente,

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^{n} \Lambda_k v = \Big(\sum_{k=1}^{n} \Lambda_k\Big) v \tag{13.14}$$

e daí decorre a relação de completeza

$$\sum_{k=1}^{n} \Lambda_k = I . \tag{13.15}$$

Além disso,

$$Av = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A v_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k v_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \Lambda_k v$$

donde

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k \Lambda_k . \tag{13.16}$$

Tal como se apresentam, as equações (13.15) e (13.16) não podem ser imediatamente generalizadas para dimensão infinita, pois operadores autoadjuntos podem não possuir autovetores. No entanto, essas equações admitem uma reformulação que também vale para operadores autoadjuntos em espaços de Hilbert de dimensão infinita. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, defina a **resolução da identidade** ou **família espectral** E_λ por

$$E_\lambda = \sum_{a_k \le \lambda} \Lambda_k , \tag{13.17}$$

que projeta no subespaço gerado pelos autovetores com autovalores $a_k \le \lambda$. Por definição, $E_\lambda = 0$ se $\lambda < a_1$ e, por (13.15), $E_\lambda = I$ se $\lambda \ge a_n$. Se $\lambda_1 \le \lambda_2$ é claro que $E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\lambda_2} E_{\lambda_1} = E_{\lambda_1}$, isto é, $E_{\lambda_1} \le E_{\lambda_2}$. Assim, E_λ cresce de 0 a I enquanto λ cresce de $-\infty$ a $+\infty$, é constante nos intervalos abertos que não contêm autovalores, e dá um salto de Λ_k quando λ atinge o valor a_k.

Com $f \equiv 1$ e $\alpha(\lambda) = E_\lambda$ temos a integral de Riemann-Stieltjes (vide Seção 6.6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE_\lambda = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} dE_\lambda = \lim_{L\to\infty} \left(E_L - E_{-L}\right) = I - 0 = I. \tag{13.18}$$

Além disso, como E_λ é seccionalmente constante e dá um salto de Λ_k em $\lambda = a_k$, o Exemplo 6.6.1 com $f(\lambda) = \lambda$ estabelece que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k \Lambda_k = A. \tag{13.19}$$

Para um operador unitário U dotado dos autovalores $a_k = e^{i\theta_k}$, com $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < 2\pi$, podemos reescrever $U = \sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} \Lambda_k$ na forma

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} dE_\lambda, \quad E_\lambda = \sum_{\theta_k \leq \lambda} \Lambda_k. \tag{13.20}$$

As representações (13.18) e (13.19) de operadores por integrais de Riemann-Stieltjes sobre o espectro não são um exercício inútil de pedantismo matemático. Sua grande vantagem reside na ausência de menção explícita à dimensão do espaço. Além disso, o parâmetro λ varia continuamente, o que permite englobar o caso de espectro contínuo. Num espaço de Hilbert de dimensão infinita há operadores autoadjuntos que não possuem autovalores. Mas, com a coleção de autovalores substituída pelo espectro, a representação integral em termos de operadores de projeção permanece válida.

Teorema 13.14 (Teorema Espectral) *Seja A um operador autoadjunto num espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Então existe uma única família $\{E_\lambda\}$ de operadores de projeção, com $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que:*

(i) *Se $\lambda_1 \leq \lambda_2$ então $E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\lambda_2} E_{\lambda_1} = E_{\lambda_1}$; dados $x \in \mathscr{H}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_{\lambda+\epsilon} x \to E_\lambda x$ quando $\epsilon \to 0+$; para cada $x \in \mathscr{H}$, $E_\lambda x \to 0$ para $\lambda \to -\infty$ e $E_\lambda x \to x$ para $\lambda \to \infty$.*

(ii) *Para quaisquer $x, y \in \mathscr{H}$ tem-se $\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\langle x, E_\lambda y \rangle$.*

(iii) *$x \in \mathrm{D}(A)$ se e somente se $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\|E_\lambda x\|^2 < \infty$.*

(iv) *Para quaisquer $y \in \mathscr{H}$ e $x \in \mathrm{D}(A)$ tem-se $\langle y, Ax \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\langle y, E_\lambda x \rangle$.*

(v) *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função contínua, $f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dE_\lambda$ é um operador linear definido no domínio denso $\mathrm{D}(f(A))$ formado pelos vetores $x \in \mathscr{H}$ tais que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2 < \infty$.*

(vi) $f(A)^* = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\lambda)} dE_\lambda$.

(vii) *Se* $x \in D(f(A))$ *e* $y \in D(g(A))$ *então* $\langle f(A)x, g(A)y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\lambda)} g(\lambda) d\langle x, E_\lambda y\rangle$.

(viii) *Se* $h(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$ *então* $h(A)$ *é uma extensão de* $f(A) + g(A)$; *se* $h(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$ *então* $h(A)$ *é uma extensão de* $f(A)g(A)$.

(ix) *Se* $x \in D(g(A))$, $|f_n(\lambda)| \leq g(\lambda)$ *e* $\lim_{n\to\infty} f_n(\lambda) = f(\lambda)$ *para cada* λ, *então* $\lim_{n\to\infty} f_n(A)x = f(A)x$.

Provado originalmente por Hilbert — em 1906 — para operadores autoadjuntos limitados e depois generalizado em 1929-30 principalmente por von Neumann, com importantes contribuições independentes de Stone e Riesz (Steen 1973), o teorema espectral é um resultado profundo com várias demonstrações disponíveis, todas elas longas e difíceis (Akhiezer & Glazman 1963, Cap. VI; Riesz & Sz.-Nagy 1955, Caps. VII-IX; Bachman & Narici 2000, Caps. 23-29; Prugovečki 1981, Seção III.6; Yosida 1980, Cap. XI). O limite utilizado para definir as integrais de Riemann-Stieltjes de operadores envolvidas no enunciado do teorema espectral deve ser entendido no sentido de convergência forte de operadores. Além disso, as integrais estendem-se apenas sobre o espectro $\sigma(A)$ do operador A. Um operador simétrico também admite uma decomposição espectral, mas os operadores $\{E_\lambda\}$ são projetores e univocamente determinados se e somente se o operador é autoadjunto (Akhiezer & Glazman 1963, Apêndice I). Costuma-se escrever simplesmente

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda, \qquad 13.21$$

cujo significado está dado pelo item (iv) do teorema espectral.

Na Seção 6.6 a integral de Riemann-Stieltjes $\int f d\alpha$ só foi definida para α crescente. Como $E_{\lambda_1}E_{\lambda_2} = E_{\lambda_2}E_{\lambda_1} = E_{\lambda_1}$ se $\lambda_1 < \lambda_2$, segue-se que $\|E_\lambda x\|^2$ é uma função crescente de λ, pois é imediato que $E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}$ é um projetor e

$$\|E_{\lambda_2}x\|^2 - \|E_{\lambda_1}x\|^2 = \|(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})x\|^2 \geq 0, \quad \lambda_2 > \lambda_1.$$

Assim, as integrais envolvendo $d\langle x, E_\lambda y\rangle = d\langle E_\lambda x, E_\lambda y\rangle$ no teorema espectral são definidas por meio da identidade de polarização:

$$\langle E_\lambda x, E_\lambda y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|E_\lambda(x+y)\|^2 - \|E_\lambda(x-y)\|^2 + i\|E_\lambda(x-iy)\|^2 - i\|E_\lambda(x+iy)\|^2\Big).$$

Exemplo 13.3.1

Decomposição espectral do operador de posição Q em $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$. A definição da família espectral de Q é sugerida pelas manipulações formais que se seguem, familiares dos textos de mecânica quântica. Seja $\{|x\rangle\}$ uma "base ortonormal contínua" constituída por "autovetores" de Q, isto é,

$$Q|x\rangle = x|x\rangle , \quad \langle x|x'\rangle = \delta(x-x') .$$

Por analogia com a equação (13.17), escrevemos formalmente

$$E_\lambda = \int_{-\infty}^{\lambda} |x'\rangle\langle x'|\, dx' .$$

Em consequência,

$$(E_\lambda\psi)(x) = \langle x|E_\lambda|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\lambda} \delta(x-x')\psi(x')dx' = \begin{cases} \psi(x) & \text{se } \lambda > x \\ 0 & \text{se } \lambda < x \end{cases}$$

com uma ambiguidade nesta expressão formal para $\lambda = x$. Isto sugere definir

$$(E_\lambda\psi)(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{se } x \leq \lambda \\ 0 & \text{se } x > \lambda \end{cases} . \tag{13.22}$$

Então

$$\big(E_\lambda(E_\lambda\psi)\big)(x) = \begin{cases} (E_\lambda\psi)(x) & \text{se } x \leq \lambda \\ 0 & \text{se } x > \lambda \end{cases} = \begin{cases} \psi(x) & \text{se } x \leq \lambda \\ 0 & \text{se } x > \lambda \end{cases} = (E_\lambda\psi)(x),$$

de modo que $E_\lambda^2 = E_\lambda$. Por outro lado, para quaisquer $f, g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle f, E_\lambda g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}(E_\lambda g)(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\lambda} \overline{f(x)}g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(E_\lambda f)(x)}g(x)dx = \langle E_\lambda f, g\rangle \end{aligned}$$

e E_λ é simétrico. Como $D(E_\lambda) = \mathscr{H}$, infere-se que E_λ é autoadjunto e, portanto, é um projetor. Para todo $f \in \mathscr{H}$, verifica-se imediatamente que se $\lambda_1 \leq \lambda_2$ então

$$E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} f = E_{\lambda_1} f$$

e, além disso,

$$\|E_{\lambda+\epsilon}f - E_\lambda f\|^2 = \int_\lambda^{\lambda+\epsilon} |f(x)|^2 dx \to 0 \text{ para } \epsilon \to 0+ .$$

Finalmente,

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \|E_\lambda f\|^2 = \lim_{\lambda\to-\infty} \int_{-\infty}^{\lambda} |f(x)|^2 dx = 0$$

e

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|E_\lambda f - f\|^2 = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\lambda}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 0,$$

de modo que todas as condições do teorema espectral são satisfeitas por E_λ. Resta verificar (ii)-(iv). Temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\langle f, E_\lambda g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\int_{-\infty}^{\lambda} \overline{f(x)} g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\lambda)} g(\lambda) d\lambda = \langle f, g\rangle$$

e, para $g \in D(Q)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\langle f, E_\lambda g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \overline{f(\lambda)} g(\lambda) d\lambda = \langle f, Qg\rangle .$$

Por fim, o domínio de Q é constituído por todos os vetores f tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\|E_\lambda f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\int_{-\infty}^{\lambda} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 |f(\lambda)|^2 d\lambda < \infty,$$

que coincide com D(Q) definido no Exercício 11.2.4. Portanto, podemos escrever

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda .$$

Embora a determinação explícita da família espectral $\{E_\lambda\}$ de um operador autoadjunto seja em geral muito difícil, a mera existência da decomposição espectral é suficiente para a obtenção de importantes resultados.

Teorema 13.15 *Um operador autoadjunto A é limitado se e somente se o seu espectro é limitado. Além do mais,* $\sigma(A) \subset \big[-\|A\|, \|A\|\,\big]$ *se A é autoadjunto e limitado.*

Demonstração. Se $\sigma(A)$ é limitado existe $a > 0$ tal que $\sigma(A) \subset [-a, a]$. Logo, como a região de integração no teorema espectral não vai além do espectro,

$$\|Ax\|^2 = \int_{-a}^{a} \lambda^2 d\|E_\lambda x\|^2 \leq \int_{-a}^{a} a^2 d\|E_\lambda x\|^2 \leq a^2 \int_{-a}^{a} d\|E_\lambda x\|^2 \leq a^2 \|x\|^2$$

e A é limitado. Suponha, agora, que A é limitado mas o seu espectro não é limitado superiormente. Então existem números reais $n > m > \|A\|$ tais que o projetor $E_n - E_m$ não é nulo, isto é, existe $x \neq 0$ tal que $(E_n - E_m)x = x$. Note que

$$E_\lambda x = E_\lambda (E_n - E_m)x = \begin{cases} (E_n - E_m)x & \text{se } \lambda \geq n \\ (E_\lambda - E_m)x & \text{se } m < \lambda < n \\ (E_\lambda - E_\lambda)x = 0 & \text{se } \lambda \leq m \end{cases} .$$

Portanto, $d\|E_\lambda x\|^2 = d\langle x, E_\lambda x\rangle = 0$ exceto se $m < \lambda < n$, de modo que

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \int_m^n \lambda^2 d\|E_\lambda x\|^2 \\ &\geq \int_m^n m^2 d\|E_\lambda x\|^2 \geq m^2 \int_m^n d\|E_\lambda x\|^2 = m^2 \|x\|^2 > \|A\|^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

o que é impossível. Analogamente, prova-se que o espectro tem que ser limitado inferiormente por $-\|A\|$. Decorre ainda deste raciocínio que $E_n - E_m = 0$ sempre que $n > m > \|A\|$ ou $m < n < -\|A\|$, donde se conclui que o espectro está contido no intervalo de integração que dá contribuição não nula na decomposição espectral de A, ou seja, $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$. ∎

De acordo com o Teorema 13.8, se A é um operador autoadjunto positivo, isto é, se $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ para todo $x \in D(A)$, então $\sigma(A) \subset [0, \infty)$. O teorema espectral permite uma outra demonstração deste resultado. Suponha que $m < n < 0$ e $E_n - E_m \neq 0$, isto é, existe $x \neq 0$ tal que $(E_n - E_m)x = x$. Pelo mesmo argumento utilizado na prova do Teorema 13.15, temos que $x \in D(A)$ e

$$\langle x, Ax\rangle = \int_m^n \lambda d\langle x, E_\lambda x\rangle = \int_m^n \lambda d\|E_\lambda x\|^2 \leq n \int_m^n d\|E_\lambda x\|^2 = n\|x\|^2 < 0,$$

o que é impossível.

O teorema espectral estende-se a operadores unitários, isto é, se U é um operador unitário existe uma única família espectral $\{E_\lambda\}$ tal que $E_0 = 0$ e $E_{2\pi} = I$ em termos da qual

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} dE_\lambda . \qquad 13.23$$

Como $E_{\lambda_1} \leq E_{\lambda_2}$ para $\lambda_1 \leq \lambda_2$, temos

$$E_\lambda = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda \leq 0 \\ I & \text{se } \lambda \geq 2\pi \end{cases}$$

e a integração pode ser estendida a toda a reta real:

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda} dE_\lambda . \qquad 13.24$$

Por outro lado, se A é autoadjunto então $U = e^{iA}$ é unitário. De fato, pelo teorema espectral, se $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$, então,

$$U = e^{iA} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda} dE_\lambda .$$

É claro que $D(U) = \mathscr{H}$ porque $|e^{i\lambda}| = 1$ e, pelo item (vi) do teorema espectral,

$$U^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda} dE_\lambda = e^{-iA}, \quad D(U^*) = \mathscr{H} .$$

Finalmente, pelo item (viii) do teorema espectral com $f(\lambda) = e^{i\lambda}$ e $g(\lambda) = e^{-i\lambda}$,

$$UU^* = U^* U = I$$

já que tanto UU^* quanto $U^* U$ estão definidos no espaço de Hilbert inteiro. De acordo com estes resultados, se H é um operador autoadjunto e definirmos

$$U_t = e^{itH} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE_\lambda , \quad t \in \mathbb{R},$$

então U_t é uma família uniparamétrica de operadores unitários com as seguintes propriedades:

$$U_0 = I, \quad U_t U_s = U_{t+s}, \quad U_{-t} = U_t^{-1} = U_t^* .$$

Reciprocamente, uma família uniparamétrica de operadores unitários define um operador autoadjunto.

Teorema 13.16 (Stone) *Seja U_t unitário para cada $t \in \mathbb{R}$ e suponha que se $t \to t_0$ então $U_t x \to U_{t_0} x$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathscr{H}$. Se $U_t U_s = U_{t+s}$ para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$, existe um único operador autoadjunto H tal que $U_t = e^{itH}$. O vetor $x \in D(H)$ se e somente se $(it)^{-1}(U_t - I)x$ converge quando $t \to 0$ e, neste caso, o vetor limite é Hx.*

A demonstração deste teorema não é trivial e pode ser encontrada, por exemplo, em Reed & Simon (1980, Seção VIII.4).

Note que, pelo teorema de Stone, se $\Psi(t) = U_t\Psi \in D(H)$ temos

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Psi(t+\Delta t)-\Psi(t)}{i\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{i\Delta t}(U_{t+\Delta t}-U_t)\Psi$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{i\Delta t}(U_{\Delta t}-I)U_t\Psi = HU_t\Psi.$$

Escrevendo $-H/\hbar$ no lugar de H resulta

$$i\hbar\frac{d\Psi(t)}{dt} = H\Psi(t), \tag{13.25}$$

que é a equação de Schrödinger se H é o operador hamiltoniano, e

$$U_t = e^{-\frac{it}{\hbar}H} \tag{13.26}$$

é o operador de evolução temporal.

13.4 *Probabilidade, Comutatividade e Compatibilidade*

Seja Q o operador de posição em $L^2(\mathbb{R})$ e seja $I = (a,b]$ um intervalo da reta real. Se $\{E_\lambda\}$ é a família espectral associada a Q, defina $E_I = E_b - E_a$, que é um projetor, como se comprova facilmente. Além disso, de acordo com (13.22),

$$(E_I\psi)(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{se } x \in I \\ 0 & \text{se } x \notin I \end{cases}. \tag{13.27}$$

Portanto, se Ψ_t é a função de onda normalizada de uma partícula no instante t, a probabilidade $P_t(I)$ de se encontrar a partícula no intervalo I no instante t é

$$P_t(I) = \int_I |\Psi_t(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |(E_I\Psi_t)(x)|^2 dx = \langle \Psi_t, E_I\Psi_t\rangle. \tag{13.28}$$

Se $Q^{(1)},\dots,Q^{(n)}$ são os operadores de posição em $L^2(\mathbb{R}^n)$ definidos por

$$(Q^{(k)}f)(x_1,\dots,x_n) = x_k f(x_1,\dots,x_n), \quad k = 1,\dots,n,$$

com domínios óbvios, então

$$(E_\lambda^{(k)}\psi)(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} \psi(x_1,\dots,x_n) & \text{se } x_k \le \lambda \\ 0 & \text{se } x_k > \lambda \end{cases} \tag{13.29}$$

é a família espectral de $Q^{(k)}$. Consequentemente, a probabilidade de se ter $x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n$ simultaneamente no instante t é

$$\begin{aligned} P_t(I_1,\ldots,I_n) &= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} |\Psi_t(x_1,\ldots,x_n)|^2 dx_1 \cdots dx_n \\ &= \langle \Psi_t, E_{I_1}^{(1)} \cdots E_{I_n}^{(n)} \Psi_t \rangle . \end{aligned} \tag{13.30}$$

Mais geralmente, sejam $\mathscr{A}^{(1)}, \ldots, \mathscr{A}^{(n)}$ grandezas físicas mensuráveis cujos operadores autoadjuntos correspondentes são $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$, com as respectivas famílias espectrais $E_\lambda^{(1)}, \ldots, E_\lambda^{(n)}$. Então, é um postulado da mecânica quântica (von Neumann 1955, Seção III.1) que a probabilidade de que, numa medição no instante t, as quantidades $\mathscr{A}^{(1)}, \ldots, \mathscr{A}^{(n)}$ assumam valores nos respectivos intervalos $I_1, \ldots, I_n$ é dada por

$$P_t\big(\mathscr{A}^{(1)} \in I_1, \ldots, \mathscr{A}^{(n)} \in I_n\big) = \langle \Psi_t, E_{I_1}^{(1)} \cdots E_{I_n}^{(n)} \Psi_t \rangle . \tag{13.31}$$

Note que esta probabilidade é bem definida se e somente se a cada operador $A^{(k)}$ corresponde uma única família espectral $E_\lambda^{(k)}$. Mas isto ocorre se e somente se $A^{(k)}$ é autoadjunto, não basta ser simétrico (Akhiezer & Glazman 1963, Apêndice I). Na mecânica quântica, portanto, a cada grandeza física mensurável tem que ser associado um único operador autoadjunto.[2]

Mas uma importante ressalva precisa ser feita. A ordem de $\mathscr{A}^{(1)}, \ldots, \mathscr{A}^{(n)}$ é arbitrária no processo de medição, pois todas as grandezas são medidas no mesmo instante t. Portanto, o segundo membro de (13.31) não pode depender da ordem, isto é, os operadores de projeção $E_\lambda^{(1)}, \ldots, E_\lambda^{(n)}$ devem ser comutativos, o que implica a comutatividade dos operadores $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$. Assim, só é possível definir uma probabilidade conjunta para o resultado de medições de grandezas físicas **compatíveis**, isto é, cujos operadores correspondentes comutam entre si. Notemos, ainda, que está implícito em (13.31) que uma grandeza física só pode assumir valores no seu espectro. De fato, se o intervalo I_k está fora do espectro de $A^{(k)}$ então $E_\lambda^{(k)}$ é constante em I_k e $E_{I_k}^{(k)} = 0$, donde segue-se que a probabilidade correspondente é zero.

2. Na presença das chamadas *regras de superseleção* a recíproca não é verdadeira: nem todos os operadores autoadjuntos correspondem a grandezas físicas mensuráveis e o princípio da superposição deixa de valer no espaço de Hilbert inteiro (Jordan 1969; Streater & Wightman 1964).

A noção de comutatividade, que desempenha um papel tão importante na interpretação física da mecânica quântica, merece uma discussão mais detalhada. Se A e B são operadores definidos em todo o espaço de Hilbert, dizemos que eles **comutam** ou **são comutativos** se $ABx = BAx$ para todo $x \in \mathscr{H}$. A comutatividade de operadores ilimitados é um problema mais delicado. Por exemplo, se 0 é o operador nulo e A é autoadjunto porém ilimitado, $A0$ está sempre definido, mas $0A$ só está definido sobre $D(A)$. Assim, estritamente, $A0 \neq 0A$ porque os domínios são distintos, de modo que A não comuta com 0, um estado de coisas altamente insatisfatório. Sejam A e B operadores autoadjuntos limitados definidos em todo o espaço de Hilbert, com as respectivas famílias espectrais $E_\lambda^{(A)}$ e $E_\lambda^{(B)}$. Então, se B comuta com $E_\lambda^{(A)}$ temos

$$\begin{aligned} AB &= \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda^{(A)}\Big)B = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_\lambda^{(A)}B) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(BE_\lambda^{(A)}) = B\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda^{(A)}\Big) \\ &= BA \end{aligned}$$

sobre todo vetor de $\mathscr{H}$, de modo que B comuta com A. Reciprocamente, se A e B comutam pode-se provar (von Neumann 1955, Seção II.10) que B comuta com $E_\lambda^{(A)}$ para todo λ. Temos, portanto, o seguinte teorema: os operadores autoadjuntos limitados A e B comutam se e somente se as correspondentes famílias espectrais comutam, isto é, $E_\lambda^{(A)}E_{\lambda'}^{(B)} = E_{\lambda'}^{(B)}E_\lambda^{(A)}$. Em face deste resultado, adota-se a seguinte definição de comutatividade de operadores autoadjuntos, sejam eles limitados ou ilimitados.

Definição 13.17 *Os operadores autoadjuntos A e B comutam se e somente se as respectivas resoluções da identidade $E_\lambda^{(A)}$ e $E_\lambda^{(B)}$ comutam, ou seja,*

$$E_\lambda^{(A)}E_{\lambda'}^{(B)}x = E_{\lambda'}^{(B)}E_\lambda^{(A)}x \qquad 13.32$$

para todo $x \in \mathscr{H}$ e todos os números reais λ, λ'.

Segundo esta definição, o operador nulo comuta com qualquer operador autoadjunto A. Com efeito, a família espectral $E_\lambda^{(0)}$ do operador nulo é $E_\lambda^{(0)} = I$ se $\lambda \geq 0$ e $E_\lambda^{(0)} = 0$ se $\lambda < 0$. Portanto, $E_\lambda^{(0)}$ comuta com a resolução da identidade $E_\lambda^{(A)}$ de qualquer operador autoadjunto A. Da mesma forma, um múltiplo do operador identidade comuta com todos os operadores autoadjuntos.

Definição 13.18 *Duas grandezas físicas $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são ditas* ***compatíveis*** *se os operadores autoadjuntos correspondentes, A e B, são comutativos. Se A e B não comutam, as grandezas físicas $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são ditas* ***incompatíveis****.*

Princípio da Incerteza

Heisenberg, em 1927, descobriu o princípio da incerteza, um resultado crucial da mecânica quântica e uma das maiores descobertas científicas de todos os tempos: duas grandezas físicas incompatíveis não podem ser medidas simultaneamente com precisão absoluta.

Definição 13.19 *Se $\mathscr{A}$ é uma grandeza física com operador autoadjunto associado A, o* ***valor esperado*** *ou* ***valor médio*** *de $\mathscr{A}$ no estado normalizado $\psi \in D(A)$ é denotado por $\langle A\rangle_\psi$ e definido por*

$$\langle A\rangle_\psi = \langle \psi, A\psi\rangle . \tag{13.33}$$

A ***incerteza*** *em $\mathscr{A}$ ou* ***dispersão*** *de $\mathscr{A}$ no estado normalizado $\psi \in D(A^2)$, denotada por $\Delta_\psi A$, é definida por*

$$\Delta_\psi A = \sqrt{\langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2} = \|(A - \langle A\rangle_\psi I)\psi\| . \tag{13.34}$$

Note que a incerteza na grandeza física $\mathscr{A}$ no estado ψ é zero se e somente se ψ é autovetor de A com autovalor $\langle A\rangle_\psi$. Vale destacar, ainda, que a segunda igualdade em (13.34) mostra que a incerteza em $\mathscr{A}$ no estado ψ está bem definida bastando que $\psi \in D(A)$.

Teorema 13.20 *Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ grandezas físicas incompatíveis, com operadores autoadjuntos correspondentes A e B. Se $\psi \in D(A) \cap D(B)$, $A\psi \in D(B)$, $B\psi \in D(A)$, então*

$$\Delta_\psi A\, \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2} |\langle AB - BA\rangle_\psi| . \tag{13.35}$$

Demonstração. Note que $A' = A - \langle A\rangle_\psi I$ e $B' = B - \langle B\rangle_\psi I$ satisfazem $A'B' - B'A' = AB - BA$. Além disso, $\Delta_\psi A = \|A'\psi\|$ e $\Delta_\psi B = \|B'\psi\|$. Por um lado,

$$|\langle AB - BA\rangle_\psi| = |\langle A'B' - B'A'\rangle_\psi| \leq |\langle A'B'\rangle_\psi| + |\langle B'A'\rangle_\psi| .$$

Por outro lado, como A' é autoadjunto,

$$|\langle A'B'\rangle_\psi| = |\langle \psi, A'B'\psi\rangle| = |\langle A'\psi, B'\psi\rangle| \leq \|A'\psi\|\|B'\psi\| = \Delta_\psi A\, \Delta_\psi B ,$$

onde usamos a desigualdade de Schwarz. Como a desigualdade acima permanece válida se a ordem dos operadores for invertida, temos

$$|\langle AB - BA\rangle_\psi| \leq 2\Delta_\psi A \Delta_\psi B$$

e a demonstração está completa. ∎

Se Q é o operador associado a uma coordenada cartesiana de posição e seu momento canônico conjugado é representado pelo operador P, temos $QP - PQ = i\hbar I$ e (13.35) toma a forma

$$\Delta_\psi Q \Delta_\psi P \geq \frac{\hbar}{2},$$

que é o princípio da incerteza como originalmente descoberto por Heisenberg.

COLAPSO DO PACOTE DE ONDAS

Outro postulado fundamental da mecânica quântica, especialmente salientado por von Neumann, diz respeito à modificação do estado do sistema quântico provocada por uma medição ideal. Se num dado instante o sistema encontra-se no estado Ψ e a medição simultânea das grandezas físicas compatíveis $\mathscr{A}^{(1)}, \ldots, \mathscr{A}^{(n)}$ só determina que seus valores pertencem, respectivamente, aos intervalos $I_1, \ldots, I_n$, o vetor de estado sofre a mudança abrupta

$$\Psi \longrightarrow \frac{E_{I_1}^{(1)} \cdots E_{I_n}^{(n)} \Psi}{\|E_{I_1}^{(1)} \cdots E_{I_n}^{(n)} \Psi\|}, \tag{13.36}$$

conhecida como **redução** ou **colapso do pacote de ondas**, um processo irreversível que *não pode ser descrito pela equação de Schrödinger*. Isto assegura que uma nova medição imediatamente após a primeira terá como resultado que os valores de $\mathscr{A}^{(1)}, \ldots, \mathscr{A}^{(n)}$ pertencem aos mesmo intervalos $I_1, \ldots, I_n$ com absoluta certeza, isto é, com probabilidade um. Este é o mais controvertido de todos os postulados da mecânica quântica, e numerosas teorias têm sido propostas que envolvem modificações da mecânica quântica de modo a induzir o colapso dinamicamente — para uma extensa discussão, vide Bassi *et al.* (2012).

13.5 *Dinâmica Quântica*

A dinâmica de um sistema quântico é caracterizada pelo seu operador hamiltoniano, que corresponde à energia total do sistema e determina a evolução

temporal do seu vetor de estado. A interpretação física da teoria quântica exige que o operador hamiltoniano seja autoadjunto. Costuma ser fácil encontrar uma expressão formal para o operador hamiltoniano, mas é preciso especificar seu domínio para que fique definido um operador autoadjunto. O problema matemático primordial, portanto, é o de provar que o operador hamiltoniano dos sistemas físicos fundamentais é autoadjunto.

OPERADOR HAMILTONIANO DA PARTÍCULA LIVRE

Comecemos com o problema mais simples, de definir o operador hamiltoniano da partícula livre em três dimensões.

Definição 13.21 *O **espaço de Sobolev** $\mathsf{H}^m(\mathbb{R}^n)$ é definido por*

$$\mathsf{H}^m(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid |k|^m \hat{f}(k) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}, \qquad 13.37$$

onde $|k| = (k_1^2 + \ldots + k_n^2)^{1/2}$. *As derivadas de uma função* $f \in \mathsf{H}^m(\mathbb{R}^n)$ *são definidas por*

$$\partial_\alpha f = \left((ik)^\alpha \hat{f}(k)\right)^\vee \qquad 13.38$$

e todas elas pertencem a $L^2(\mathbb{R}^n)$ *desde que* $|\alpha| \leq m$.

Conforme o Lema 9.30, esta definição de derivada coincide com a usual se $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Se $f, g \in \mathsf{H}^m(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g(x)(\partial_\alpha f)(x)\,dx &= \langle \overline{g}, \partial_\alpha f\rangle \\
&= \langle \hat{\overline{g}}, (ik)^\alpha \hat{f}(k)\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}\langle (ik)^\alpha \hat{\overline{g}}, \hat{f}(p)\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}\langle (\partial_\alpha \overline{g})\hat{}, \hat{f}\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}\langle \partial_\alpha \overline{g}, f\rangle
\end{aligned} \qquad 13.39$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)(\partial_\alpha f)(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_\alpha g)(x)\, f(x)\, d^n x$$

para $|\alpha| \leq m$. Isto caracteriza $\mathsf{H}^m(\mathbb{R}^n)$ como o conjunto das funções que possuem derivadas no sentido de distribuições até a ordem m e essas derivadas estão em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

O espaço de estados de uma partícula livre de massa m sem spin no espaço tridimensional é $L^2(\mathbb{R}^3)$. O operador hamiltoniano correspondente é

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \qquad 13.40$$

onde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{13.41}$$

é o operador laplaciano.

É necessário especificar um domínio em que H_0 seja autoadjunto. Para tanto, o espaço de Sobolev $\mathsf{H}^2(\mathbb{R}^3)$ revela-se talhado à perfeição. Definamos

$$-\Delta\psi(x) = (k^2\hat{\psi}(k))^{\vee}(x), \quad \psi \in \mathsf{H}^2(\mathbb{R}^3). \tag{13.42}$$

Em consequência, o operador H_0 definido por

$$H_0\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi, \quad \mathrm{D}(H_0) = \mathsf{H}^2(\mathbb{R}^3) \tag{13.43}$$

é autoadjunto porque é unitariamente equivalente ao operador de multiplicação

$$\begin{aligned} (U_F H_0 U_F^{-1})\phi(k) &= \frac{\hbar^2}{2m}\, k^2\phi(k), \\ \mathrm{D}(k^2) &= \{\phi \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid k^2\phi(k) \in L^2(\mathbb{R}^3)\}, \end{aligned} \tag{13.44}$$

o qual é trivialmente autoadjunto.

EVOLUÇÃO TEMPORAL E DISPERSÃO DOS PACOTES DE ONDAS

A evolução temporal de um pacote de ondas inicial ψ_0 é determinada a partir de

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= e^{-itH_0/\hbar}\psi_0(x) \\ &= U_F^{-1}U_F e^{-itH_0/\hbar}U_F^{-1}U_F\psi_0(x) = U_F^{-1}e^{-it\hbar k^2/2m}\hat{\psi}_0(k), \end{aligned} \tag{13.45}$$

onde usamos (13.44). O aparecimento de um produto de funções indica que a equação acima deve envolver uma convolução. Infelizmente, não é possível usar o teorema da convolução diretamente porque $e^{-itk^2/2m\hbar}$ não pertence a $L^2(\mathbb{R}^3)$. A fim de obter uma fórmula explícita para $\psi(x,t)$, sem almejar a máxima generalidade, suponhamos que $\hat{\psi}_0, \psi_0 \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$ e, com um apelo ao teorema da convergência dominada, escrevamos, com $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{ikx}e^{-it\hbar k^2/2m}\hat{\psi}_0(k)\,d^3k \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{ikx}e^{-it\hbar k^2/2m}e^{-\epsilon k^2}\hat{\psi}_0(k)\,d^3k. \end{aligned} \tag{13.46}$$

Usando o teorema de Fubini temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} e^{ikx} e^{-it\hbar k^2/2m} e^{-\epsilon k^2} \hat{\psi}_0(k)\, d^3k \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_{\mathbb{R}^3} e^{ikx} e^{-it\hbar k^2/2m} e^{-\epsilon k^2} e^{-iky} \psi_0(y)\, d^3y \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y\, \psi_0(y) \int_{\mathbb{R}^3} e^{ik(x-y)} e^{-it\hbar k^2/2m - \epsilon k^2}\, d^3k \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\pi^{3/2}}{(\epsilon + i\hbar t/2m)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(\epsilon + i\hbar t/2m)}} \psi_0(y) d^3y,
\end{aligned} \tag{13.47}$$

onde a raiz quadrada deve ser tomada com a parte real positiva. Substitutindo (13.47) em (13.46) e passando ao limite $\epsilon \to 0$ por meio do teorema da convergência dominada, obtemos, finalmente,

$$\psi(x,t) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t}\right)^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{im|x-y|^2}{2\hbar t}} \psi_0(y) d^3y. \tag{13.48}$$

Deste resultado infere-se imediatamente que

$$|\psi(x,t)| \leq \left(\frac{m}{2\pi \hbar t}\right)^{3/2} \|\psi_0\|_1. \tag{13.49}$$

Se $\mathcal{V}$ é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^3$ com volume V, a probabilidade de se encontrar a partícula em $\mathcal{V}$ no instante t é

$$\mathrm{P}(x \in \mathcal{V}\,; t) = \int_{\mathcal{V}} |\psi(x,t)|^2\, d^3x \leq \left(\frac{m}{2\pi \hbar t}\right)^3 \|\psi_0\|_1^2\, V \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{13.50}$$

Portanto, o pacote de ondas da partícula livre alarga-se inexoravelmente: a partícula escapa para o infinito e a probabilidade de encontrá-la em qualquer região finita do espaço tende assintoticamente a zero.

Perturbações de Operadores Autoadjuntos

É lastimável, mas é um fato da vida, que a soma de operadores autoadjuntos não é necessariamente um operador autoadjunto. Na mecânica quântica não relativística, o operador hamiltoniano — também conhecido como *operador de Schrödinger* — é tipicamente da forma $H_0 + V$, onde H_0 é o operador hamiltoniano de uma partícula livre ou soma de operadores hamiltonianos de partículas livres e V é uma função real, cujo operador de multiplicação

associado é também simbolizado por V. Como já vimos que H_0 é um operador autoadjunto relativamente fácil de definir, é de se esperar que H seja autoadjunto se a energia potencial V for uma "pequena" perturbação de H_0. É preciso, portanto, definir com precisão o que significa dizer que V é pequeno relativamente a H_0.

Definição 13.22 *Sejam A e B operadores densamente definidos num espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. O operador B é menor que A no sentido de Kato se* $\mathrm{D}(B) \supset \mathrm{D}(A)$ *e existem números reais* $0 \leq a < 1$ *e* $b \geq 0$ *tais que*

$$||Bx|| \leq a||Ax|| + b||x|| \qquad \forall x \in \mathrm{D}(A). \tag{13.51}$$

Se $\mathrm{D}(B) \supset \mathrm{D}(A)$ e existem números reais não negativos a e b tais que a desigualdade (13.51) se verifica, diz-se que B é limitado relativamente a A ou, simplesmente, A-limitado. O ínfimo de todos os números a para os quais existe um correspondente b é às vezes denotado por $N_A(B)$. Assim, B é menor que A no sentido de Kato se B é A-limitado com $N_A(B) < 1$.

Teorema 13.23 (Kato-Rellich) *Se A é um operador autoadjunto e B é um operador simétrico menor que A no sentido de Kato, então $A+B$ é autoadjunto com* $\mathrm{D}(A+B) = \mathrm{D}(A)$.

Demonstração. Pelo Teorema 12.24, o operador $C = A+B$ com $\mathrm{D}(C) = \mathrm{D}(A)$ é autoadjunto se $\mathrm{Ran}(C \pm i\lambda I) = \mathscr{H}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Como A é autoadjunto e $i\lambda$ não pertence ao seu espectro, $R_\lambda = (A - i\lambda I)^{-1}$ é um operador limitado. Note que

$$C - i\lambda I = (I + BR_\lambda)(A - i\lambda I).$$

Como $\mathrm{Ran}(A - i\lambda I) = \mathscr{H}$ pelo fato de A ser autoadjunto — Teorema 12.23 —, a fim de provar que $\mathrm{Ran}(C - i\lambda I) = \mathscr{H}$ precisamos provar que $\mathrm{Ran}(I + BR_\lambda) = \mathscr{H}$. Para tanto, basta mostrar que para $|\lambda|$ suficientemente grande tem-se $||BR_\lambda|| < 1$, pois neste caso uma expansão em série de potências (série de Neumann, Problema 11.6) estabelece que $(I + BR_\lambda)^{-1}$ existe e está definido em todo o espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, e, como consequência, que $I + BR_\lambda$ é um operador limitado com $\mathrm{Ran}(I + BR_\lambda) = \mathscr{H}$. Para qualquer $x \in \mathscr{H}$ as desigualdades

$$||R_\lambda x|| \leq \frac{1}{|\lambda|}||x|| \quad \text{e} \quad ||AR_\lambda x|| \leq ||x||$$

decorrem da igualdade $||(A-i\lambda I)y||^2 = ||Ay||^2 + |\lambda|^2||y||^2$ com $y \in \mathrm{D}(A)$ e $x = (A - i\lambda I)y$. Usando (13.51) com $y = R_\lambda x$ no lugar de x, somos conduzidos a

$$||BR_\lambda x|| \leq a||AR_\lambda x|| + b||R_\lambda x|| \leq \left(a + \frac{b}{|\lambda|}\right)||x||,$$

de modo que $||BR_\lambda|| < 1$ para $|\lambda|$ suficientemente grande. Como o mesmo argumento se aplica trocando λ por $-\lambda$, a demonstração está completa. ∎

Há uma classe consideravelmente extensa de potenciais com a propriedade de o operador de multiplicação associado ser menor, no sentido de Kato, que o operador de energia cinética H_0. Vamos restringir a discussão ao caso de uma única partícula.

Teorema 13.24 *Seja* $H = H_0 + V$, *onde* H_0 *está definido por* (13.43) *e* (13.44). *Se a energia potencial pode ser escrita na forma* $V = V_1 + V_2$ *com* $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *e* V_2 *uma função limitada, então o operador* $H = H_0 + V$ *é autoadjunto com* $\mathrm{D}(H) = \mathrm{D}(H_0) = \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração. É imediato que o operador de multiplicação por V é simétrico e a desigualdade imediatamente abaixo estabelece que $\mathrm{D}(V) \supset \mathrm{D}(H_0)$. Com $||\psi||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |\psi(x)|$, temos

$$||V\phi|| \leq ||V_1||\,||\phi||_\infty + ||V_2||_\infty||\phi||$$

desde que seja $||\phi||_\infty < \infty$ para todo $\phi \in \mathrm{D}(H_0)$. Para provar isto, a observação crucial é que $(|k|^2 + \gamma^2)^{-1}$ é uma função de quadrado integrável em $\mathbb{R}^3$ na variável k para todo $\gamma > 0$. Para $\phi \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^3)$ tem-se que $(|k|^2 + \gamma^2)\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e, pela desigualdade de Schwarz,

$$||\hat{\phi}||_1 = ||(|k|^2 + \gamma^2)^{-1}(|k|^2 + \gamma^2)\hat{\phi}||_1 \leq ||(|k|^2 + \gamma^2)^{-1}||\,||(|k|^2 + \gamma^2)\hat{\phi}||.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{3/2}||\phi||_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left|\int_{\mathbb{R}^3} e^{ikx}\hat{\phi}(k)\,d^3k\right| \\
&\leq ||\hat{\phi}||_1 \\
&\leq ||(|k|^2 + \gamma^2)^{-1}||\left(||\,|k|^2\hat{\phi}\,|| + \gamma^2||\hat{\phi}||\right) \\
&= \pi\gamma^{-1/2}\left(||H_0\phi|| + \gamma^2||\phi||\right),
\end{aligned}$$

onde, a bem da simplicidade, tomamos $\hbar^2/2m = 1$. Escolhendo γ tal que $\gamma^{-1/2}(2\pi)^{-3/2}\pi||V_1|| < 1$ resulta

$$||V\phi|| \leq a||H_0\phi|| + b||\phi||$$

com $0 < a < 1$, o que, em virtude do teorema de Kato-Rellich, completa a demonstração. ∎

Exercício 13.5.1
Prove que $||(|k|^2 + \gamma^2)^{-1}|| = \pi\gamma^{-1/2}$. Mostre que $(|k|^2 + \gamma^2)^{-1}$ não é de quadrado integrável em $\mathbb{R}^n$ se $n > 3$. O que se pode concluir disto?

O físico-matemático japonês Tosio Kato foi o primeiro a provar, em 1951, que o operador de Schrödinger de um átomo com qualquer número atômico é autoadjunto. Aqui consideraremos apenas o caso do átomo de hidrogênio. Uma prova do teorema da Kato para um átomo qualquer pode ser encontrada em Reed & Simon (1975, Seção X.2).

Teorema 13.25 *O operador hamiltoniano do átomo de hidrogênio*

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{r}, \quad r = |x|$$

é autoadjunto com $D(H) = H^2(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração. O potencial $V(\mathbf{x}) = -e^2/r$ pode ser escrito como $V = \chi_1 V + (1-\chi_1)V \equiv V_1 + V_2$, onde χ_1 denota a função característica — vide Definição A.6 no Apêndice A — da bola unitária $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1\}$. É imediato verificar que $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e V_2 é função limitada. Pelo Teorema 13.24, H é autoadjunto no domínio $D(H) = H^2(\mathbb{R}^3)$. ∎

Leituras Adicionais Selecionadas[3]

Akhiezer, N. I. e Glazman, I. M. 1963 *Theory of Linear Operators in Hilbert Space.*

3. A lista completa de referências, com plenos detalhes bibliográficos, encontra-se na Bibliografia no fim do livro. O símbolo • destaca obras cuja leitura é altamente recomendada.

- Reed, M. e Simon, B. 1980 *Methods of Modern Mathematical Physics*. Vol. I: *Functional Analysis*.
- Reed, M. e Simon, B. 1975 *Methods of Modern Mathematical Physics*. Vol. II: *Fourier Analysis, Self-Adjointness*.
  Teschl, G. 2009 *Mathematical Methods in Quantum Mechanics*.
- von Neumann, J. 1955 *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*.

Problemas

13.1. Seja $A : l^2 \to l^2$ definido por

$$Ax = A(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots) = (0,\xi_1,\frac{\xi_2}{2},\ldots,\frac{\xi_n}{n},\ldots).$$

(a) Prove que não possui nenhum autovalor. (b) Determine os autovalores de A^*. (c) Prove que $\|A\| = \|A^*\| = 1$.

13.2. Seja $L^2_{cont}(0,1)$ o conjunto das funcões de quadrado integrável e contínuas em $[0,1]$. Encontre os autovalores e as autofunções do operador

$$(Kf)(x) = \int_0^1 u(x)v(y)f(y)\,dy$$

em $L^2_{cont}(0,1)$, onde u e v são funções contínuas fixas e não nulas. Mostre que K é limitado e determine sua norma.

13.3. Seja $T : l^\infty \to l^\infty$ o operador linear definido da seguinte maneira: se $x = (\xi_1,\xi_2,\ldots) \in l^\infty$, então $Tx = (\xi_2,\xi_3,\ldots)$. (a) Mostre que λ é um autovalor de T se $|\lambda| \le 1$. (b) Mostre que λ é um valor regular de T se $|\lambda| > 1$. (c) O que se pode concluir sobre o espectro de T?

13.4. Sejam P e Q projetores num espaço de Hilbert. Determine condições que devem ser satisfeitas para que:
(a) $P + Q$ seja um projetor;
(b) PQ seja um projetor.

13.5. Seja $\{e_n\}$ uma base ortonormal num espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ e $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ o operador linear definido por $Ae_n = ae_n - e_{n+1}$, onde $a \in \mathbb{C}$. (a) A é limitado? (b) A possui autovalores? (c) Prove que $a \in \sigma_r(A)$.

13.6. O espectro de um operador ilimitado não precisa ser ilimitado. Determine o resolvente do operador A em $L^2(0,1)$ definido por

$$Af = f', \quad \mathrm{D}(A) = \{f \in \mathrm{H}^1[0,1] \mid f(0) = 0\}$$

e conclua que seu espectro é vazio (logo, limitado).

13.7. Determine os autovalores e as autofunções do operador

$$(Af)(x) = 2\int_0^1 (2xy - x - y + 1) f(y)\, dy$$

em $L^2_{cont}(0,1)$.

13.8. Determine os autovalores e autovetores, se existirem, dos operadores de criação e aniquilação definidos no Problema 12.4.

13.9. Seja P um operador de projeção ortogonal diferente de zero e da identidade num espaço de Hilbert. Prove que todo $\lambda \neq 0,1$ é valor regular de P, isto é, $P - \lambda I$ tem inverso limitado. Portanto, o espectro de P consiste em $\{0,1\}$.

13.10. Prove que o número complexo λ pode pertencer ao espectro de um operador unitário somente se $|\lambda| = 1$.

13.11. Seja A um operador linear em $L^2(\mathbb{R})$ tal que $D(A) \subset \mathscr{S}$ e $\mathrm{Ran}(A) \subset \mathscr{S}$. A distribuição temperada T é uma **autofunção generalizada** do operador A com autovalor λ se

$$T(A\phi) = \lambda T(\phi) \text{ para todo } \phi \in \mathscr{S}.$$

Seja T_p a distribuição temperada associada à função $f_p(x) = e^{ipx}$ por meio de

$$T_p(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_p(x)}\phi(x)\, dx.$$

Prove que T_p é uma autofunção generalizada do operador $-id/dx$ com autovalor p.

13.12. (a) Sejam X um espaço normado e $S, T \in \mathscr{L}(X)$ tais que $S^2 = S$, $T^2 = T$ e $ST = TS$. Prove que $S = T$ ou $||S - T|| \geq 1$. (b) Seja $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert. Se P e Q são projetores em $\mathscr{H}$ tais que PQ também é um projetor, então $P = Q$ ou $||P - Q|| = 1$.

13.13. Seja $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua não nula e considere o operador $A : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ definido por

$$(Af)(x) = \varphi(x) \int_0^1 \varphi(t)\, f(t)\, dt.$$

(a) Prove que A é positivo e autoadjunto.

(b) Prove que existe $\lambda > 0$ tal que $A^2 = \lambda A$.

(c) Determine $\sqrt{A}$.

(d) Prove que A é um projetor não nulo se e somente se $\int_0^1 \varphi(t)^2\, dt = 1$.

13.14. Seja $X = C[0,1]$, o espaço de Banach das funções reais contínuas em $[0,1]$ com a norma do supremo. Seja $A : X \to X$ o operador linear definido por

$$(Af)(x) = \int_0^x (x-t) f(t)\, dt, \quad 0 \le x \le 1.$$

(a) Determine A^{-1}, o que inclui especificar o seu domínio. (b) Prove que A é limitado mas A^{-1} é ilimitado. (c) Prove que A não possui autovalores.

13.15. O operador linear definido em $C[0,1]$ — com a norma do supremo — por

$$(Af)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt & \text{se } 0 < x \le 1 \\[2ex] f(0) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é limitado? Se a resposta for positiva, determine sua norma. Mostre que A tem uma infinidade contínua de autovalores e encontre as autofunções associadas.

13.16. Considere o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis em $[0,1]$ que se anulam na origem juntamente com suas derivadas de todas as ordens (este espaço contém, por exemplo, a restrição a $[0,1]$ da função definida por $e^{-1/x}$ para $x > 0$ e 0 para $x \le 0$). Seja X este espaço vetorial equipado com a norma do supremo e defina $A : X \to X$ por $Af = f'$. (a) Prove que A não é limitado. (b) Mostre que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$ e qualquer $g \in X$, a equação $(A - \lambda) f = g$ possui uma solução em X, de modo que o espectro de A é vazio.

14

Formalismo Cego e "Paradoxos" da Mecânica Quântica

Um grau considerável de negligência no que concerne ao rigor matemático é perfeitamente aceitável na física teórica, e provavelmente indispensável para o seu progresso.[1] No entanto, a prática — infelizmente muito difundida — de reduzir a matemática da física teórica a um formalismo cego e desenfreado, mero catálogo de procedimentos mecânicos supostos válidos irrestritamente, não raro conduz a falsos paradoxos. A falta de preocupação com a definição precisa dos entes matemáticos envolvidos na expressão de grandezas físicas torna impossível identificar as causas dessas aparentes contradições. Os exemplos a seguir ilustram, em problemas físicos simples, erros, ambiguidades ou "paradoxos" cuja resolução só é possível por meio de uma abordagem matematicamente rigorosa. Nossa discussão baseia-se em parte no excelente artigo de Gieres (2000), onde muitos outros detalhes podem ser encontrados.

14.1 *Partícula Numa Caixa*

Considere uma partícula de massa m restrita ao intervalo $(0,a)$ por paredes impenetráveis: o potencial $V(x)$ a que a partícula está sujeita é, formalmente,

1. Davey (2003) defende uma posição bastante sensata quanto ao papel do rigor matemático na Física.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0,a) \\ \infty & \text{se } x \notin (0,a) \end{cases} .$$

O operador hamiltoniano

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \tag{14.1}$$

com domínio

$$\mathrm{D}(H) = \{f \in \mathsf{H}^2[0,a] \,|\, f(0) = f(a) = 0\} \tag{14.2}$$

é autoadjunto.

A fim de justificar esta assertiva, adotemos a mesma técnica empregada no Exemplo 12.4.2. Se $g \in \mathrm{D}(H^*)$ existe $g_* \in L^2(0,a)$ tal que $\langle g_*, f\rangle = \langle g, Hf\rangle$ para todo $f \in \mathrm{D}(H)$, isto é,

$$\int_0^a \overline{g_*(x)} f(x)dx = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^a \overline{g(x)} f''(x)dx \quad \forall f \in \mathrm{D}(H).$$

A função $h \in L^2(0,a)$ definida por

$$h(x) = \int_0^x (x-t)g_*(t)dt = x\int_0^x g_*(t)dt - \int_0^x tg_*(t)dt$$

é absolutamente contínua em $[0,a]$ e satisfaz

$$h'(x) = \int_0^x g_*(t)dt, \quad h'' = g_* .$$

Logo, h' é absolutamente contínua e $h'' \in L^2(0,a)$, ou seja, $h \in \mathsf{H}^2[0,a]$. Com a ajuda da função h, para cada $f \in C_0^\infty(0,a) \subset \mathrm{D}(H)$ podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_0^a \overline{g_*(x)} f(x)dx &= \int_0^a \overline{h''(x)} f(x)dx = \overline{h'(x)} f(x)\Big|_0^a - \int_0^a \overline{h'(x)} f'(x)dx \\ &= -\int_0^a \overline{h'(x)} f'(x)dx = -\overline{h(x)} f'(x)\Big|_0^a + \int_0^a \overline{h(x)} f''(x)dx \\ &= \int_0^a \overline{h(x)} f''(x)dx\end{aligned}$$

porque tanto f quanto f' anulam-se em $x=0$ e $x=a$. Consequentemente,

$$\int_0^a \overline{\left(h + \frac{\hbar^2}{2m}g\right)(x)} f''(x)dx = 0 \quad \forall f \in C_0^\infty(0,a).$$

Segue-se que a função $h+(\hbar^2/2m)g$ é uma distribuição cuja segunda derivada é zero:

$$\left(h+\frac{\hbar^2}{2m}g\right)''=0 \implies h''=-\frac{\hbar^2}{2m}g'' \implies H^*g=g_*=h''=-\frac{\hbar^2}{2m}g''.$$

Além disso, para quase todo $x\in(0,a)$, temos (vide Exercício 9.2.1)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}g(x)=h(x)+Ax+B,\quad A \text{ e } B \text{ constantes},$$

o que mostra que $g\in \mathrm{H}^2[0,a]$. Assim, $\mathrm{D}(H^*)\subset \mathrm{H}^2[0,a]$. Por outro lado, se $g\in \mathrm{H}^2[0,a]$ está no domínio de H^*, tem-se $H^*g=-(\hbar^2/2m)g''$ e

$$\langle g,Hf\rangle-\langle H^*g,f\rangle=-\frac{\hbar^2}{2m}[\overline{g(a)}f'(a)-\overline{g(0)}f'(0)]=0\quad \forall f\in \mathrm{D}(H). \tag{14.3}$$

Como os valores de $f'(0)$ e $f'(a)$ são arbitrários, todos os elementos do domínio de H^* devem satisfazer $g(0)=g(a)=0$ para que (14.3) seja válida. Assim, as funções do domínio de H^* satisfazem as mesmas condições de contorno que as funções do domínio de H, de modo que $\mathrm{D}(H)=\mathrm{D}(H^*)$ e, neste domínio comum,

$$H^*=H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}. \tag{14.4}$$

Há múltiplas maneiras de fixar o domínio do operador $-d^2/dx^2$ em $L^2(0,a)$ de modo a torná-lo autoadjunto (Bonneau, Faraut & Valent 2001). As condições de contorno (14.2) decorrem de argumentos físicos. No caso de um poço de potencial de altura finita V_0, a função de onda de uma partícula com energia $E<V_0$ decresce exponencialmente à medida que se penetra na região classicamente proibida (fora do poço), e tende a zero em toda essa região no limite $V_0\to\infty$. Isto indica que as funções de onda da partícula numa caixa devem se anular fora da caixa e sobre suas paredes; no caso, $x=0$ e $x=a$.

As autofunções normalizadas de H são

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{a},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{14.5}$$

com as respectivas energias

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}. \tag{14.6}$$

Os vetores $\{\psi_n\}$ constituem uma base ortonormal de $L^2(0,a)$. Pelo Teorema 13.11, o espectro de H consiste somente nos seus autovalores.

Consideremos o estado normalizado

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{30}{a^5}}\, x(x-a) \tag{14.7}$$

e busquemos calcular a dispersão da energia neste estado, definida por

$$\Delta_\psi H = \sqrt{\langle H^2\rangle_\psi - \langle H\rangle_\psi^2}\,. \tag{14.8}$$

Por um lado,

$$\begin{aligned} \langle H\rangle_\psi &= \langle \psi, H\psi\rangle \\ &= \int_0^a \overline{\psi(x)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)dx \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{30}{a^5}\int_0^a x(x-a)2dx = \frac{5\hbar^2}{ma^2}\,. \end{aligned} \tag{14.9}$$

Por outro lado,

$$H^2\psi = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2 \frac{d^4\psi}{dx^4} = 0 \tag{14.10}$$

e concluimos sem mais delongas que

$$\langle H^2\rangle_\psi = \langle \psi, H^2\psi\rangle = 0\,. \tag{14.11}$$

Uma vez substituídos em (14.8), os resultados (14.11) e (14.9) dão uma dispersão da energia imaginária!

Há fortes razões para desconfiar de (14.10) e de (14.11). Como o operador H^2 representa uma grandeza física positiva, o seu valor médio deve ser positivo em qualquer estado. De fato, como H é autoadjunto, deveríamos ter

$$\langle H^2\rangle_\psi = \langle \psi, H^2\psi\rangle = \langle H\psi, H\psi\rangle = \int_0^a \left|-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}\right|^2 dx = \frac{30\hbar^4}{m^2a^4}\,, \tag{14.12}$$

o que conduz a

$$\Delta_\psi H = \sqrt{5}\,\frac{\hbar^2}{ma^2}\,, \tag{14.13}$$

que faz sentido.

Há algo de errado: as equações (14.11) e (14.12) são mutuamente contraditórias! A fonte do erro é a desconsideração do domínio do operador H^2. A função de onda ψ dada por (14.7) pertence ao domínio de H, mas $H\psi$, sendo uma função constante diferente de zero, não pertence ao domínio de H porque não se anula em $x = 0$ e $x = a$. Portanto, ψ não pertence ao domínio de H^2 e a equação (14.10) é destituída de significado.

Note que, de acordo com a equação (13.34), a incerteza na energia pode ser calculada por meio de $\Delta_\psi H = ||(H - \langle H\rangle_\psi I)\psi||$, que só exige que $\psi \in D(H)$. Como

$$(\Delta_\psi H)^2 = \langle (H - \langle H\rangle_\psi I)\psi, (H - \langle H\rangle_\psi I)\psi\rangle = \langle H\psi, H\psi\rangle - \langle H\rangle_\psi^2$$

porque H é autoadjunto, confirma-se o resultado (14.13).

"Paradoxos" análogos ao que acabamos de discutir aparecem na aplicação do teorema de Ehrenfest a uma partícula numa caixa (Hill 1973) e no cálculo perturbativo, em primeira ordem, da correção relativística da energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio (Lieber 1972).

Problemas relacionados à interpretação física e à descrição matemática adequada de partículas confinadas por barreiras impenetráveis, particularmente no que diz respeito ao operador que se deve associar ao momento linear, continuam sendo debatidos pelos físicos (Bonneau, Faraut & Valent 2001; Garbaczewski & Karkowski 2004).

14.2 *Momento Angular*

Em coordenadas esféricas, a terceira componente cartesiana do operador momento angular de uma partícula escreve-se

$$L_z = xP_y - yP_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad 14.14$$

onde φ é o ângulo azimutal. Como $\varphi \in [0,2\pi]$, há uma infinidade de extensões autoadjuntas de $-i\partial/\partial\varphi$ (veja o Exemplo 12.5.1). A escolha da extensão apropriada é ditada por razões físicas. A função $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ evidentemente pertence ao domínio de L_z e é invariante sob rotações dos eixos cartesianos. Isto significa que f não é afetada por uma rotação de 2π radianos

em torno do eixo z, de modo que o domínio de L_z deve ser composto por funções periódicas de período 2π:

$$D(L_z) = \{f \in L^2(0,2\pi) \mid f \in H^1[0,2\pi] \text{ e } f(0) = f(2\pi)\}. \qquad 14.15$$

O operador L_z possui uma coleção discreta de autovalores e autovetores:

$$L_z\psi_m = m\hbar\psi_m, \quad \psi_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad m \in \mathbb{Z}. \qquad 14.16$$

Como $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal de $L^2(0,2\pi)$, os autovalores $\{m\hbar\}$ compõem a totalidade do espectro de L_z.

O operador correspondente ao ângulo azimutal φ — que, por simplicidade, também será denotado por φ — é o operador de multiplicação usual definido sobre todo o espaço de Hilbert $\mathscr{H} = L^2(0,2\pi)$:

$$(\varphi\psi)(\varphi) = \varphi\psi(\varphi), \quad D(\varphi) = L^2(0,2\pi). \qquad 14.17$$

Os operadores φ e L_z obedecem formalmente à relação de comutação

$$[\varphi, L_z] = \varphi L_z - L_z\varphi = i\hbar I, \qquad 14.18$$

da qual se deduz

$$\begin{aligned} i\hbar &= \langle\psi_m, [\varphi, L_z]\psi_m\rangle = \langle\psi_m, \varphi L_z\psi_m\rangle - \langle\psi_m, L_z\varphi\psi_m\rangle \\ &= m\hbar\langle\psi_m, \varphi\psi_m\rangle - \langle L_z\psi_m, \varphi\psi_m\rangle \\ &= m\hbar\langle\psi_m, \varphi\psi_m\rangle - m\hbar\langle\psi_m, \varphi\psi_m\rangle = 0! \end{aligned} \qquad 14.19$$

Esta contradição mostra que há algo de errado com este cálculo.

Examinemos os domínios dos operadores envolvidos na equação (14.19). Como $D(\varphi) = \mathscr{H}$, temos que

$$D(\varphi L_z) = D(L_z) = \{f \in L^2(0,2\pi) \mid f \in H^1[0,2\pi] \text{ e } f(0) = f(2\pi)\}. \qquad 14.20$$

Quanto ao domínio de $L_z\varphi$, deve ser composto por funções f tais que $\varphi f \in D(L_z)$, isto é,

$$\varphi f(\varphi)|_{\varphi=0} = \varphi f(\varphi)|_{\varphi=2\pi} \implies f(2\pi) = 0. \qquad 14.21$$

Portanto,

$$D(L_z\varphi) = \{f \in L^2(0,2\pi) \mid f \in H^1[0,2\pi] \text{ e } f(2\pi) = 0\} \qquad 14.22$$

e resulta que

$$\begin{aligned} D([\varphi, L_z]) &= D(\varphi L_z) \cap D(L_z\varphi) = \{f \in L^2(0,2\pi) \mid f \in H^1[0,2\pi] \\ &\text{e } f(0) = f(2\pi) = 0\}. \end{aligned} \tag{14.23}$$

Como as autofunções ψ_m não pertencem a $D([\varphi, L_z])$, o cálculo (14.19) é ilegítimo e não há contradição.

Há uma extensa, interessante e controvertida literatura sobre as relações de comutação e as relações de incerteza entre o ângulo azimutal e a componente correspondente do momento angular, um tema também relevante para a óptica quântica (Judge & Lewis 1963; Judge 1964; Carruthers & Nieto 1965 e 1968; Perlman & Troup 1969; Kastrup 2006).

14.3 *Dispersão de Pacotes de Ondas*

É de praxe, nos textos de mecânica quântica, "definir" funções de operadores por séries de potências (Cohen-Tannouji, Diu & Laloë 1977, Complemento B_{II}). Em primeiro lugar, tal "definição" não é suficientemente geral. Por exemplo, se A é um operador autoadjunto positivo com decomposição espectral

$$A = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda, \tag{14.24}$$

sua raiz quadrada positiva é o operador autoadjunto definido por

$$\sqrt{A} = \int_0^\infty \sqrt{\lambda}\, dE_\lambda. \tag{14.25}$$

Note que $\sqrt{\lambda}$ não admite série de Taylor em torno de $\lambda = 0$, de modo que a "definição" de $\sqrt{A}$ via série de potências não é possível.

Um problema mais sério é que, mesmo quando é possível, a "definição" de função de um operador pela série de potências pode não ser correta (Klein 1980). Seja, por exemplo,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \tag{14.26}$$

o operador hamiltoniano de uma partícula livre em uma dimensão. Admitindo que o operador de evolução temporal pode ser definido por uma série de potências, somos levados a escrever

$$\Psi(t) = U_t\Psi_0 = e^{-\frac{it}{\hbar}H}\Psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it/h)^n}{n!} H^n\Psi_0 . \tag{14.27}$$

Escolha a função de onda inicial $\Psi_0 \in \mathscr{D}$, isto é, Ψ_0 é uma função infinitamente diferenciável de suporte compacto. Se (14.27) vale, então em todo instante t a função de onda $\Psi(t)$ se anula fora do suporte de Ψ_0 e o pacote de ondas inicial Ψ_0 não se dispersa. No entanto, como $\Psi_0 \in L^1(\mathbb{R})$, de acordo com a Eq.(13.50) o pacote de ondas $\Psi(t)$ se alarga indefinidamente para $t \to \infty$, isto é, a probabilidade de se encontrar a partícula em qualquer intervalo de comprimento finito torna-se arbitrariamente pequena no limite $t \to \infty$. Isto contradiz a Eq.(14.27), segundo a qual a probabilidade de se encontrar a partícula no suporte de Ψ_0 deveria permanecer sempre igual a 1.

Há uma única saída do impasse em que nos encontramos: a série de potências (14.27) é divergente com a presente escolha de Ψ_0 (Klein 1980) e não representa $\Psi(t)$. Portanto, a "definição" de função de um operador autoadjunto via série de potências nem sempre é válida, de modo que é preciso recorrer ao teorema espectral para uma definição que é sempre correta. Se H fosse um operador limitado, o que não é o caso, a série (14.27) seria convergente e representaria uma definição legítima do operador de evolução temporal.

14.4 *Simetrização do Produto de Operadores Não Comutativos*

Em certos contextos físicos aparecem grandezas que se acredita serem mensuráveis mas que classicamente se exprimem como o produto de outras grandezas mensuráveis cujos correspondentes operadores autoadjuntos não comutam. Nesses casos, alguma simetrização do produto de operadores é executada a fim de produzir um operador formalmente autoadjunto.

Em $L^2(\mathbb{R})$, considere o operador (Jaffe 1969; Bogolubov, Todorov & Logunov 1975, p. 38)

$$A = Q^3P + PQ^3 \tag{14.28}$$

com domínio inicial $D(A) = \mathscr{S}$, o espaço de Schwartz das funções infinitamente diferenciáveis de decréscimo rápido no infinito. O operador A é *formalmente* autoadjunto pois, como Q e P são autoadjuntos, aparentemente

$$A^* = P^*(Q^3)^* + (Q^3)^*P^* = P(Q^*)^3 + (Q^*)^3P = PQ^3 + Q^3P = A . \tag{14.29}$$

A fim de ir além de considerações puramente formais, passemos a investigar o domínio de A^*. Supondo que $g \in D(A^*)$ é diferenciável, uma integração por partes dá

$$\langle g, Af\rangle = \langle \frac{1}{i}[(x^3 g)' + x^3 g'], f\rangle + \frac{2}{i}\left[x^3 \overline{g(x)} f(x)\right]_{-\infty}^{\infty}, \qquad 14.30$$

onde usamos $P = -i d/dx$ (tomamos $\hbar = 1$ para simplificar). Para que o termo de fonteira em (14.30) seja nulo não é necessário que g decresça rapidamente no infinito: basta que g *não cresça* mais rapidamente do que um polinômio. Admitindo que g goza desta propriedade, resulta

$$A^* g = -i[(x^3 g)' + x^3 g']. \qquad 14.31$$

A^* age da mesma maneira que A mas seu domínio é maior: inclui todas as funções $g \in L^2(\mathbb{R})$ que são diferenciáveis e não crescem mais rapidamente do que um polinômio.

Consideremos os índices de deficiência de A:

$$A^* g_\pm(x) = \pm i g_\pm(x) \Longrightarrow g_\pm(x) = \begin{cases} |x|^{-3/2} e^{\pm \frac{1}{4x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}. \qquad 14.32$$

Somente g_- pertence ao domínio de A^*, pois é de quadrado integrável:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_-(x)|^2 dx = 2\int_0^{\infty} x^{-3} e^{-1/2x^2} dx = 2\left[e^{-1/2x^2}\right]_0^{\infty} = 2. \qquad 14.33$$

Como $g_+ \notin L^2(\mathbb{R})$, temos $1 = n_- \neq n_+ = 0$ e o operador (14.28) não possui extensões autoadjuntas: a equação (14.29) é falsa e A não pode representar uma grandeza física mensurável na mecânica quântica.

14.5 *Moral da História*

Estes exemplos nos ensinam algumas lições: (i) os domínios de operadores autoadjuntos ilimitados não podem ser ignorados; (ii) é preciso ter cuidado com manipulações formais envolvendo operadores ilimitados; (iii) a definição correta de função de um operador autoadjunto é aquela fornecida pelo teorema espectral; (iv) a simetrização do produto de operadores autoadjuntos não comutativos nem sempre gera um operador autoadjunto.

A especificação dos domínios de operadores ilimitados não é um aborrecimento dispensável, mero preciosismo matemático: a desconsideração desses domínios é a fonte última dos falsos paradoxos da mecânica quântica que acabamos de discutir. Além disso, o conteúdo *físico* de um modelo depende crucialmente das condições de contorno adotadas, o que implica uma escolha específica do domínio do operador hamiltoniano que se ajusta ao problema (Araújo, Coutinho & Perez 2004). Em certos problemas de mecânica quântica ou da teoria quântica de campos, a presença de anomalias — violações de leis de conservação clássicas pelo processo de quantização — deve-se à existência de operadores que não deixam invariante o domínio do operador hamiltoniano (Esteve 1986 e 2002). Como talvez em nenhum outro ramo da Física, na teoria quântica a harmonia entre intuição física e rigor matemático parece indispensável para impedir que nos desviemos do caminho certo.

Leituras Adicionais Selecionadas[2]

Bonneau, G., Faraut, J. e Valent, G. 2001 *Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics.*

• Gieres, F. 2000 *Mathematical surprises and Dirac's formalism in quantum mechanics.*

Klein, J. R. 1980 *Do Free Quantum Mechanical Wave Packets Always Spread?*

Problemas

14.1. Uma extensão autoadjunta $\tilde{H}$ de $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2}$ em $L^2(0,a)$ é caracterizada pelo domínio

$$\mathrm{D}(\tilde{H}) = \left\{ f \in \mathrm{H}^2[0,a] \mid f'(0) = f'(a) = 0 \right\}.$$

(a) Prove que $\tilde{H}$ é autoadjunto. (b) Determine o espectro de $\tilde{H}$ e compare-o com o espectro energético usual de uma partícula numa caixa. (c) Mostre que

2. A lista completa de referências, com plenos detalhes bibliográficos, encontra-se na Bibliografia no fim do livro. O símbolo • destaca obras cuja leitura é altamente recomendada.

tanto $\tilde{H}$ quanto o operador H definido por (14.1) e (14.2) são distintos de $\frac{P_\theta^2}{2m}$ para qualquer θ, onde P_θ é o operador definido no Exemplo 12.5.1.

14.2. Considere o operador

$$H = \frac{1}{2}(xP + Px) = -i\left(x\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\right)$$

em $\mathscr{H} = L^2(0,\infty)$ com domínio

$$D(H) = \left\{ f \in L^2(0,\infty) \mid f \in AC(0,\infty) \text{ e } \int_0^\infty x^2 |f'(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

(a) Examinando a integral

$$\int_0^x \frac{d}{dt}\left(t\overline{f(t)}f(t)\right)dt,$$

prove que se $f \in D(H)$ então $x|f(x)|^2$ tende a um limite finito quando $x \to \infty$, e que esse limite só pode ser zero. Com base neste resultado, e notando que $2x|\overline{f(x)}g(x)| \le x(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$ para $x > 0$, prove que o operador H é simétrico. (b) Prove que H é autoadjunto estabelecendo que $\mathrm{Ran}(H \pm iI) = \mathscr{H}$. Sugestão: mostre que uma solução da equação diferencial $Hf + if = g$, com $g \in L^2(0,\infty)$, é

$$f(x) = -ix^{1/2}\int_x^\infty t^{-3/2}g(t)dt = -i\int_1^\infty u^{-3/2}g(xu)du,$$

e prove que $f \in L^2(0,\infty)$ e $f \in D(H)$; raciocínio análogo aplica-se à equação $Hf - if = g$, mas tomando a integral de 0 a x na solução para f.

14.3. Seja $\Psi(t)$ o vetor de estado de um sistema físico no instante t, que satisfaz a equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d\Psi(t)}{dt} = H\Psi(t).$$

O operador de inversão temporal T é definido de tal modo que

$$T^* Q_k T = Q_k, \quad T^* P_k T = -P_k,$$

que correspondente intuitivamente a uma inversão do sentido das velocidades de todas as partículas do sistema. (a) Mostre que a compatibilidade desta

definição de T com as relações de comutação canônicas $[Q_k, P_l] = i\hbar\delta_{kl}I$ requer que T seja antiunitário (vide Problema 12.11). (b) Seja $\Psi_{inv}(t)$ o vetor de estado com o tempo invertido, definido por $\Psi_{inv}(t) = T\Psi(-t)$. Prove que se o operador hamiltoniano é invariante sob inversão temporal, $[H, T] = 0$, então $\Psi_{inv}(t)$ também obedece à equação de Schrödinger acima: a dinâmica quântica é invariante sob inversão do tempo.

A

Integral de Lebesgue

No fim do século XIX, em larga medida devido a dificuldades suscitadas pela teoria das séries de Fourier, muitos matemáticos convenceram-se da necessidade de substituir a integral de Riemann por um outro tipo de integral, mais geral e mais bem comportada no que se refere à operação de passar ao limite sob o sinal de integral. Das várias propostas de generalização da integral de Riemann, a mais bem sucedida foi a integral definida por Henri Lebesgue nos primeiros anos do século XX.

Desafortunadamente, a teoria da integração de Lebesgue é consideravelmente mais intrincada que a de Riemann. Por força desta circunstância, este apêndice consiste numa coleção das definições básicas e dos resultados que nos parecem mais importantes para as aplicações físicas, com raras demonstrações. Nos textos de McShane (1944), Rudin (1974) e Royden (1968) podem ser encontradas quase todas as demonstrações aqui omitidas. Dunham (2005), em prosa vívida e colorida, expõe as motivações e ideias essenciais da teoria de Lebesgue. Hawkins (1975) apresenta um relato circunstanciado da evolução histórica do conceito de integral até o surgimento da teoria da integração de Lebesgue. Bressoud (2008) introduz o essencial da teoria de Lebesgue com ênfase nos problemas históricos que conduziram ao seu desenvolvimento, num texto bem motivado.

Para o leitor interessado em se aprofundar no assunto há, além das referências já citadas, bons textos em português, tais como Fernandez (1975), Castro Jr. (2004) e Isnard (2009).

A.1 *Motivações Preliminares*

Uma diferença fundamental entre as integrais de Riemann e de Lebesgue é que a primeira envolve uma partição do *domínio* da função, ao passo que a integral de Lebesgue envolve uma partição da *imagem* da função, conforme representado na Figura A.1.
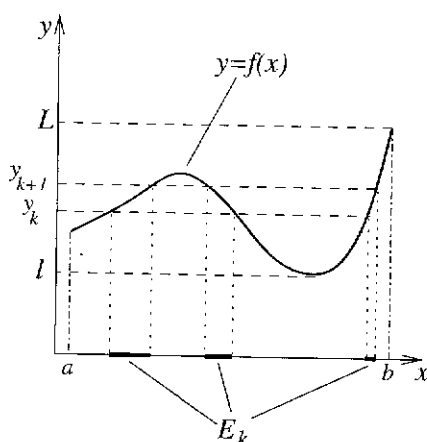
Fig. A.1 *Partição da imagem de uma função: o conjunto* $E_k = \{x \mid y_k \leq f(x) \leq y_{k+1}\}$ *é a união dos três intervalos indicados.*

Para uma partição $l = y_0 < y_1 < \ldots < y_k < y_{k+1} < \ldots < y_n = L$ da imagem $f(I)$ do intervalo $I = [a,b]$, a área sob o gráfico de f pode ser definida, aproximadamente, pela soma de Lebesgue

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \, m(E_k),$$

onde $E_k = \{x \mid y_k \leq f(x) \leq y_{k+1}\}$ denota o subconjunto do domínio da função em que ela toma valores no subintervalo $[y_k, y_{k+1}]$ — a união dos três intervalos indicados na Figura A.1 — e $m(E_k)$ é a soma dos comprimentos desses intervalos. Caso essas somas de Lebesgue se aproximem indefinidamente de um valor finito no limite em que o valor máximo de $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ tende a zero, esse valor define a integral da função f no intervalo $[a,b]$. À primeira vista, a ideia de Lebesgue parece inócua: não seria meramente uma outra maneira — e mais complicada, diga-se de passagem — de obter a mesmíssima

integral de Riemann? Esta impressão inicial é enganosa porque os conjuntos E_k não precisam ser intervalos nem uniões finitas de intervalos, de modo que uma soma de Lebesgue pode não ser redutível a uma soma de Riemann se a função f for muito irregular. Lebesgue mostrou que sua definição de integral é aplicável a uma coleção muito mais extensa de funções do que a família de funções integráveis à Riemann.

O custo dessa mudança de ponto de vista é a necessidade de definir a medida de conjuntos muito mais gerais do que os intervalos. O benefício é uma integral definida para uma classe extraordinariamente extensa de funções e que permite que seja tomado o limite sob o sinal de integral sob circunstâncias muito mais amplas do que as permitidas pela integral de Riemann. Por um motivo técnico — facilitar a prova de teoremas —, a integral de Lebesgue é definida de um modo diferente do esboçado acima, sem abandonar, no entanto, a essência da ideia básica.

A.2 *Medida*

A integral de Lebesgue apoia-se na noção de *medida* de um conjunto — uma generalização do comprimento de um intervalo de números reais — e numa classe muito extensa de *funções mensuráveis*. As funções mensuráveis são caracterizadas a partir dos *conjuntos mensuráveis*, que passamos a definir.

Definição A.1 *Uma coleção $\mathscr{A}$ de subconjuntos de um conjunto X é dita uma σ-álgebra em X se $\mathscr{A}$ goza das seguintes propriedades:*

(i) $X \in \mathscr{A}$.

(ii) *Se $A \in \mathscr{A}$ então $A^c \in \mathscr{A}$, onde A^c é o complemento de A em X.*

(iii) *Se $A_n \in \mathscr{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, então $A \in \mathscr{A}$.*

Note que $\varnothing \in \mathscr{A}$ porque $\varnothing = X^c$. Como $A \setminus B = A \cap B^c$, segue-se que $A \setminus B \in \mathscr{A}$ se A e B estão em $\mathscr{A}$. Além disso, $\mathscr{A}$ também é uma coleção fechada sob interseções enumeráveis porque $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\big)^c$.

Definição A.2 *Se $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra em X, diz-se que X é um* ***espaço mensurável***,[1] *e os membros de $\mathscr{A}$ são chamados de* ***conjuntos mensuráveis*** *em X.*

1. A rigor, o termo "espaço mensurável" deveria se referir ao par ordenado $(X,\mathscr{A})$, mas esta terminologia um tanto incômoda só costuma ser usada quando há risco de ambiguidade.

É instrutivo observar as semelhanças e diferenças entre espaço mensurável e espaço topológico (vide Seção 8.1).

Na teoria geral da integração é conveniente introduzir o conjunto $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ dos **números reais estendidos**, formado pela junção dos elementos $-\infty$ e ∞ ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Introduzidos por conveniência, os símbolos "$-\infty$" e "∞" *não* são números reais. A relação de ordem $<$ é estendida a $\overline{\mathbb{R}}$ postulando que $-\infty < x < \infty$ para cada número real x. Para cada número real x define-se

$$\begin{aligned} x + \infty &= \infty, \\ x - \infty &= -\infty \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} x \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty \text{ se } x > 0, \\ x \cdot (\pm\infty) &= \mp\infty \text{ se } x < 0. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Evidentemente $\infty + \infty = \infty$, mas a operação $\infty - \infty$ não é definida. Na teoria da integração é vantajoso *convencionar* que $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$, o que será feito de ora em diante.

Definição A.3 *Uma **medida** μ num espaço mensurável $(X, \mathscr{A})$ é uma função com valores em $[0, \infty]$ definida para todos os conjuntos de $\mathscr{A}$ que satisfaz $\mu(\varnothing) = 0$ e goza da propriedade de* aditividade enumerável, *isto é,*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \tag{A.3}$$

*qualquer que seja a sequência (E_n) de conjuntos mensuráveis mutuamente disjuntos. Um **espaço de medida** $(X, \mathscr{A}, \mu)$ consiste num espaço mensurável $(X, \mathscr{A})$ juntamente com uma medida μ definida em $\mathscr{A}$.*

Cumpre destacar que a aditividade enumerável implica a aditividade finita: tomando $E_{k+1} = E_{k+2} = \ldots = \varnothing$ resulta $\mu(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \ldots + \mu(E_k)$.

Exercício A.2.1
Se μ é uma medida e A e B são conjuntos mensuráveis com $A \subset B$, prove que $\mu(A) \le \mu(B)$.

Exemplo A.2.1
[Medidas] (a) Seja X um conjunto arbitrário e para qualquer um de seus subconjuntos A defina $\mu(A) = \infty$ se A é um conjunto infinito, e $\mu(A)$ igual ao números de elementos de A se A é finito. Esta medida μ é chamada de **medida de contagem** em X. (b) Seja X um conjunto não enumerável e $\mathscr{A}$ a coleção dos subconjuntos de X que são enumeráveis ou o complemento de um conjunto enumerável. Então $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra e nela pode-se definir uma medida pondo $\mu(A) = 0$ se A é enumerável e $\mu(A) = 1$ se o complemento de A é enumerável.

Os exemplos acima mostram a existência de medidas, mas são artificiais e de escassa utilidade. A construção de medidas interessantes é difícil e laboriosa. A mais importante delas é a medida de Lebesgue sobre a reta real.

A construção da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ parte da introdução de uma medida exterior. Dado um conjunto A qualquer de números reais, considere uma coleção enumerável $\{I_n\}$ de intervalos abertos que cobrem A, isto é, $A \subset \cup_n I_n$. Seja $l(I_n) = b_n - a_n$ o comprimento do n-ésimo intervalo aberto $I_n = (a_n, b_n)$. A **medida exterior** $m^*(A)$ de A é o ínfimo da soma de todos esses comprimentos:

$$m^*(A) = \inf_{A \subset \cup I_n} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) . \tag{A.4}$$

A soma acima independe da ordem porque todos os seus termos são positivos. Além disso, a medida exterior está definida para todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ porque o ínfimo de uma coleção de números positivos existe e é não negativo. Como seria de se esperar, a medida exterior de um intervalo é igual ao seu comprimento, mas a demonstração deste fato não é imediata (Royden 1968).

A medida exterior tem a virtude de estar definida para todos os conjuntos de números reais, mas não é uma medida porque não goza da propriedade de aditividade enumerável. A medida exterior torna-se enumeravelmente aditiva desde que a família de conjuntos sobre os quais ela está definida seja adequadamente reduzida. Historicamente, a construção da medida de Lebesgue baseou-se na introdução de uma medida interior e na definição dos conjuntos mensuráveis como aqueles cuja medida exterior é igual à medida interior.

Modernamente, costuma-se caracterizar os conjuntos mensuráveis por meio de uma definição equivalente descoberta por Carathéodory.

Definição A.4 *Um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é dito* ***mensurável*** *se*

$$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \setminus A) \tag{A.5}$$

para qualquer conjunto B em $\mathbb{R}$.

Prova-se que a coleção dos conjuntos mensuráveis é uma σ-álgebra, e que, restrita aos conjuntos mensuráveis, m^* é enumeravelmente aditiva. A medida de Lebesgue m é a medida exterior m^* restrita aos conjuntos mensuráveis. A coleção dos conjuntos mensuráveis é extraordinariamente extensa. Em particular, todos os conjuntos abertos e fechados são mensuráveis; são também mensuráveis conjuntos que não são abertos nem fechados, tais como o conjunto dos números racionais. É preciso lançar mão do axioma da escolha para demonstrar que existem conjuntos não mensuráveis.

Prova-se, ainda, que qualquer conjunto de medida exterior nula é mensurável e, obviamente, tem medida de Lebesgue nula. Isto permite mostrar, por exemplo, que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais tem medida nula — doravante, sempre que não houver risco de confusão, "medida" designará a medida de Lebesgue. Seja $r_1, r_2, r_3, \ldots$ uma enumeração dos racionais. Dado $\epsilon > 0$, considere a coleção de intervalos abertos I_n com

$$I_n = \left(r_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right).$$

É evidente que $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Portanto,

$$m^*(\mathbb{Q}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon . \tag{A.6}$$

Como este resultado vale para todo número positivo ϵ, segue-se que $m^*(\mathbb{Q}) = 0$ donde $m(\mathbb{Q}) = 0$.

O conjunto dos irracionais é mensurável porque é o complemento do conjunto dos racionais, que é mensurável. Por exemplo, como o conjunto dos racionais em $[0,1]$ tem medida nula, o conjunto dos irracionais em $[0,1]$ tem a medida total do intervalo, ou seja, 1.

A.3 *Funções Simples Positivas*

Comecemos introduzindo uma classe muito extensa de funções para as quais será possível definir uma integral.

Definição A.5 *Uma função f com valores em $\overline{\mathbb{R}}$ é dita **mensurável** se o seu domínio é mensurável e se, para cada número real a, o conjunto $\{x \mid f(x) > a\}$ é mensurável.*

Comentário. Uma definição equivalente é obtida considerando qualquer um dos conjuntos $\{x \mid f(x) \geq a\}$, $\{x \mid f(x) < a\}$ ou $\{x \mid f(x) \leq a\}$.

A classe de funções mensuráveis é extraordinariamente vasta. São mensuráveis as funções contínuas, as funções descontínuas num número finito de pontos e mesmo funções descontínuas em todos os pontos, tais como a função de Dirichlet. Além disso, o limite pontual de qualquer sequência de funções mensuráveis é mensurável. De novo, é somente com um apelo ao axioma da escolha que se consegue construir uma função não mensurável.

Definição A.6 *Se A é qualquer conjunto, a **função característica** χ_A do conjunto A é a função definida por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} . \qquad \text{A.7}$$

Note que a função χ_A é mensurável se e somente se A é mensurável.

Exercício A.3.1

Se A e B são conjuntos disjuntos, prove que $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$.

Definição A.7 *Uma função s num espaço mensurável X é dita uma **função simples positiva** se sua imagem consiste num número finito de pontos de $[0, \infty)$. Note que ∞ está excluído do conjunto de valores que s pode tomar. Se $a_1, \ldots, a_n$ são os valores distintos assumidos por s e se definirmos $A_i = \{x \mid s(x) = a_i\} = s^{-1}(\{a_i\})$, então é claro que*

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} . \qquad \text{A.8}$$

Evidentemente, s é mensurável se e somente se cada A_i é mensurável.
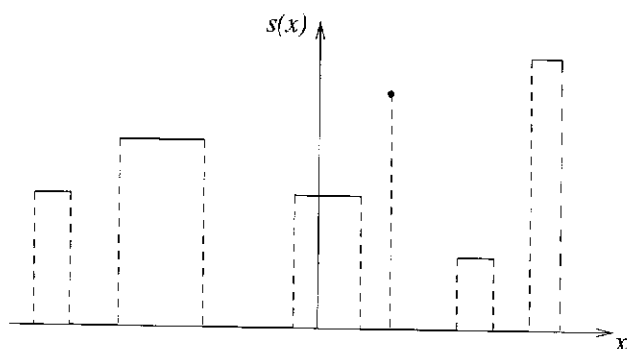
Fig. A.2 *Função simples positiva.*

A.4 *Integral de Funções Positivas*

A integral de uma função simples positiva num espaço de medida $(X,\mathscr{A},\mu)$ é definida da maneira natural.

Definição A.8 (Integral de função simples positiva) *Se s é uma função simples positiva da forma* (A.8), *onde $a_1,\ldots,a_n$ são os valores distintos assumidos por s, e se E é um conjunto mensurável, definimos*

$$\int_E s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mu(A_i \cap E). \qquad \text{A.9}$$

A convenção $0\cdot\infty = 0$ é usada aqui, pois pode-se ter $a_i = 0$ para algum i e $\mu(A_i \cap E) = \infty$.

A integral de uma função positiva f é definida aproximando a função cada vez melhor por funções simples positivas com gráfico sempre abaixo do gráfico de f.

Definição A.9 (Integral de função positiva) *Se $f : X \to [0,\infty]$ é mensurável e $E \in \mathscr{A}$, definimos*

$$\int_E f\,d\mu = \sup_{s\le f} \int_E s\,d\mu, \qquad \text{A.10}$$

onde o supremo é tomado sobre as funções simples positivas mensuráveis tais que $0 \le s \le f$. A função f é dita **integrável** *sobre E se sua integral é finita, isto é, se $\int_E f\,d\mu < \infty$.*

Comentário sobre notação. Quando μ é a medida de Lebesgue m, costuma-se escrever $\int_E f(x)dx$ em vez de $\int_E f\,dm$, e se $E = [a,b]$ escreve-se $\int_a^b f(x)\,dx$ em vez de $\int_{[a,b]} f(x)dx$.

Exercício A.4.1
Prove a seguinte propriedade importante: se $\mu(E) = 0$ então $\int_E f\,d\mu = 0$ mesmo que $f(x) = \infty$ para todo $x \in E$.

Exercício A.4.2
Sejam f e g funções mensuráveis positivas com $f \le g$. Prove que se g é integrável então f também é integrável.

Exercício A.4.3
Se A e B são mensuráveis com $A \cap B = \emptyset$ então

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu. \tag{A.11}$$

Prove que isto é uma consequência imediata do Exercício (A.3.1) e do Teorema (3.14).

A integral de Riemann de uma função limitada no intervalo finito $E = [a,b]$ é o limite da soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\mu(E_i) \tag{A.12}$$

onde $E_1,\ldots,E_n$ são os subintervalos em que o intervalo $E = [a,b]$ é particionado, $\xi_i \in E_i$ e $\mu(E_i)$ é o comprimento do subintervalo E_i. Para que f seja integrável em E segundo Riemann, o limite deve existir quando o maior de todos os comprimentos dos subintervalos tende a zero e deve ser independente da escolha dos pontos ξ_i de cada subintervalo.

Conforme já destacado anteriormente, uma das principais diferenças entre as integrais de Riemann e de Lebesgue é que a primeira envolve uma partição do *domínio* da função, ao passo que a segunda envolve uma partição da *imagem* da função. Em consequência, como notado na Seção 6.2, a integral de

Riemann da função de Dirichlet f_D (definida na Seção 5.3) em $[0,1]$ não existe porque cada subintervalo E_i de $[0,1]$ contém números racionais e irracionais. Se todos os ξ_i em (A.12) forem escolhidos racionais a soma dá 1, ao passo que se todos os ξ_i forem escolhidos irracionais a soma dá zero. Portanto, não existe um limite das somas (A.12) que seja independente da escolha dos ξ_i. Em contraste, note que f_D é uma função simples: se $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ é conjunto dos racionais em $[0,1]$ então $f_D = \chi_A$. Portanto, de acordo com (A.9), a integral de Lebesgue de f_D em $[0,1]$ existe e é igual a zero porque, como já vimos, a medida de Lebesgue do conjunto dos racionais em $[0,1]$ é nula.

Seja $r_1, r_2, r_3, \ldots$ uma enumeração dos racionais em $[0,1]$. A sequência (f_n) de funções em $[0,1]$ definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{r_1, \ldots, r_n\} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\} \end{cases} \qquad \text{A.13}$$

converge para f_D. Cada f_n é integrável segundo Riemann com integral igual a zero porque f_n só difere da função identicamente nula num número finito de pontos: como os subintervalos em torno desses pontos são em número finito e seus comprimentos tendem a zero, sua contribuição para a soma (A.12) tenderá a zero independentemente da escolha de ξ_i em cada um desses subintervalos. No entanto, a função-limite f_D não é integrável segundo Riemann. Por outro lado, como cada f_n é integrável segundo Lebesgue com integral igual a zero e $f_D = \lim_{n\to\infty} f_n$ também é integrável segundo Lebesgue com integral igual a zero, a igualdade

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \qquad \text{A.14}$$

só é verdadeira para a integral de Lebesgue.

A.5 *Definição Geral da Integral de Lebesgue*

A definição geral da integral de Lebesgue é feita a partir da decomposição de uma função em suas partes positiva e negativa.

Definição A.10 *A parte positiva f^+ de uma função f é definida por*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}. \qquad \text{A.15}$$

Analogamente, a parte negativa f^- de f é definida por

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}. \tag{A.16}$$

Note que f^+ e f^- são funções positivas tais que

$$f = f^+ - f^- \quad \text{e} \quad |f| = f^+ + f^-. \tag{A.17}$$

Exercício A.5.1
Prove (A.17).

Prova-se que f^+ e f^- são mensuráveis se f for mensurável, o que permite definir a integral de f da maneira natural.

Definição A.11 (Integral de Lebesgue) *Uma função mensurável f é dita integrável sobre E se tanto f^+ quanto f^- são integráveis sobre E. Neste caso, definimos*

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu. \tag{A.18}$$

Comentário. Dado um espaço de medida $\{X, \mathscr{A}, \mu\}$, a integral de Lebesgue pode ser definida sempre sobre X, bastando que se defina a integral sobre E por

$$\int_E f\,d\mu = \int_X f\chi_E\,d\mu. \tag{A.19}$$

Uma vez que $\int_E |f|\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu + \int_E f^-\,d\mu$, segue-se que f é integrável segundo Lebesgue se e somente se $|f|$ é integrável. Eis aqui uma diferença importante entre as integrais de Riemann e de Lebesgue: $|f|$ pode ser integrável à Riemann sem que f o seja (Problema 6.1).

No que se refere a propriedades básicas tais como linearidade e aditividade da integral sobre intervalos disjuntos, a integral de Lebesgue comporta-se exatamente da mesma maneira que a integral de Riemann.

A integral de Lebesgue é estendida a funções complexas de modo perfeitamente natural.

Definição A.12 *Se f_1 e f_2 são funções reais, a função complexa $f = f_1 + if_2$ é dita integrável sobre E se tanto f_1 quanto f_2 são integráveis sobre E. Neste caso, definimos*

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f_1\,d\mu + i\int_E f_2\,d\mu. \tag{A.20}$$

Decorre imediatamente da definição da integral de Lebesgue para funções reais que se g é integrável e f é mensurável com $|f| \leq |g|$, então f é integrável. Além disso, se f e g são integráveis e $f \leq g$ então $\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$.

Teorema A.13 *Seja $f = f_1 + if_2$ uma função complexa integrável. Então $|f|$ é integrável e*

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu. \tag{A.21}$$

Demonstração. De $|f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq |f_1| + |f_2|$ decorre que $|f|$ é integrável porque f_1 e f_2 são integráveis. Seja $\int_X f\,d\mu = ae^{i\theta}$ com $a = |\int_X f\,d\mu|$ e θ real. Portanto,

$$a = e^{-i\theta}\int_X f\,d\mu = \int_X e^{-i\theta} f\,d\mu.$$

Seja $e^{-i\theta} f = g_1 + ig_2$ onde g_1 e g_2 são funções reais. Como $a = \int_X g_1\,d\mu + i\int_X g_2\,d\mu$ e a é real, segue-se que $\int_X g_2\,d\mu = 0$ e, portanto, $a = \int_X g_1\,d\mu$. Mas $g_1 \leq |g_1| \leq |f|$, de modo que $|\int_X f\,d\mu| = a = \int_X g_1\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu$ e a demonstração está completa. ∎

CONJUNTOS DE MEDIDA NULA

Por causa das definições (A.8) e (A.9), se $E = \{x \in X \,|\, f(x) \neq 0\}$ e $\mu(E) = 0$, segue-se que $\int_X f\,d\mu = 0$. Portanto, funções que só diferem num conjunto de medida nula têm integrais iguais. Além disso, se $f \geq 0$ e $\int_X f\,d\mu = 0$ prova-se que $f = 0$ exceto num conjunto de medida nula.

Definição A.14 *Seja $\{X, \mathscr{A}, \mu\}$ um espaço de medida e $E \in \mathscr{A}$. Diz-se que uma certa propriedade P vale em quase toda parte*[2] *em E se o subconjunto de E em que P não vale tem medida zero: $\mu(\{x \in E \,|\, P(x)\ \text{é falsa}\}) = 0$.*

2. Em francês, *presque partout* (p.p.); em inglês, *almost everywhere* (a.e.).

Costuma-se abreviar "em quase toda parte" por q.t.p. e também se diz "em quase todo ponto" ou "para quase todo ponto". Vale notar que a noção de "em quase toda parte" depende da medida considerada. Quando houver mais de uma medida em consideração, escreve-se q.t.p.[μ] ou algo semelhante para a noção de "em quase toda parte" referente à medida μ.

A.6 *Riemann Versus Lebesgue*

Comecemos reformulando a definição da integral de Riemann numa linguagem que facilita sua comparação com a integral de Lebesgue.

Uma **função-escada positiva** em $[a,b]$ é uma função ψ da forma

$$\psi(x) = c_k, \quad x \in I_k, \tag{A.22}$$

para certas constantes $c_k \geq 0$ e alguma coleção finita de intervalos disjuntos I_k cuja união é $[a,b]$. Como uma função-escada positiva é uma função simples positiva, sua integral de Lebesgue é

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}), \tag{A.23}$$

onde x_{k-1} e x_k são as extremidades do intervalo I_k. A integral superior de f pode ser expressa na forma

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \inf_{\psi \geq f} \int_a^b \psi(x)\,dx, \tag{A.24}$$

onde o ínfimo é tomado para todas as funções-escada $\psi \geq f$. Analogamente,

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \sup_{\psi \leq f} \int_a^b \psi(x)\,dx \tag{A.25}$$

com o supremo tomado para todas as funções-escada $\psi \leq f$.

A fim de distinguir a integral de Lebesgue da integral de Riemann, esta última será denotada por $\mathscr{R}\int_a^b f(x)\,dx$.

Teorema A.15 *Seja f uma função definida no intervalo limitado $[a,b]$. Se f é integrável à Riemann em $[a,b]$, então f é integrável à Lebesgue em $[a,b]$ e*

$$\mathcal{R}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \qquad \text{A.26}$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que f seja não negativa. Como toda função-escada é uma função simples, se a integral de Riemann $\mathcal{R}\int_a^b f(x)dx$ existe temos

$$\mathcal{R}\int_a^b f\,dx = \sup_{\psi\le f}\int_a^b \psi\,dx \le \sup_{s\le f}\int_a^b s\,dx \le \inf_{s\ge f}\int_a^b s\,dx \le \inf_{\psi\ge f}\int_a^b \psi\,dx$$
$$= \mathcal{R}\int_a^b f\,dx,$$

o que prova (A.26).[3] Para o caso geral, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M$ para todo $x \in [a,b]$ (f é limitada por ser integrável à Riemann) e basta aplicar o mesmo argumento à função $f + M$. ∎

Este resultado estabelece que a integral de Lebesgue é de fato uma generalização da integral de Riemann porque, como vimos, há funções integráveis à Lebesgue que não são integráveis à Riemann.

Outra vantagem da integral de Lebesgue sobre a de Riemann é que esta última só é definida para intervalos limitados $[a,b]$, ao passo que a integral de Lebesgue está definida sobre qualquer conjunto mensurável, limitado ou ilimitado. Quando o intervalo é ilimitado, a integral de Riemann sobre o referido intervalo é definida como uma integral imprópria, limite de integrais sobre intervalos limitados. Na teoria da integração de Lebesgue os intervalos de integração limitados e ilimitados são tratados de forma unificada e não existe a noção de integral imprópria. A integral de Riemann imprópria de uma função pode existir sem que a função seja integrável à Lebesgue, mas se f é integrável à Lebesgue e a integral de Riemann imprópria de f existe, ela é igual à integral de Lebesgue de f. Por outro lado, se as integrais de Riemann impróprias de f e $|f|$ existem, pode-se provar (Apostol 1974, seção 10.13) que a integral de Lebesgue de f existe e coincide com a integral de Riemann imprópria de f.

3. Prova-se que toda função integrável à Riemann é automaticamente mensurável.

Na teoria de Lebesgue não existe a noção de integrabilidade condicional: a função f é integrável se e somente se $|f|$ é integrável. Em suma, toda função integrável segundo Lebesgue é absolutamente integrável. A função $x \mapsto \operatorname{sen} x/x$ possui uma integral de Riemann imprópria em $[0,\infty)$ igual a $\pi/2$ mas não é integrável à Lebesgue porque não é absolutamente integrável:

$$\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx \geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{(n+1)\pi}\, dx$$
$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty .$$

A.7 *Teoremas de Convergência*

Os teoremas de convergência, que permitem a passagem ao limite sob o sinal de integral em condições extremamente brandas e em qualquer espaço de medida, contam-se entre os grandes triunfos da teoria da integração de Lebesgue, e estabelecem a superioridade da integral de Lebesgue sobre a integral de Riemann.

Teorema A.16 (Teorema da Convergência Monótona) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções mensuráveis em* X *tal que:*
(a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \ldots \leq \infty$ *para todo* $x \in X$;
(b) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *para todo* $x \in X$.
Então f *é mensurável e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu , \qquad \text{A.27}$$

isto é, pode-se passar ao limite sob o sinal de integral.

Note que o teorema da convergência monótona não afirma que a função-limite f é integrável. Caso f não seja integrável, a igualdade (A.27) significa $\infty = \infty$.

Se a sequência de funções integráveis não é monótona, basta que convirja em quase toda parte e seja limitada por uma função integrável para que a passagem ao limite sob o sinal de integral seja legítima.

Teorema A.17 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em X tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para quase todo x em X. Suponha que exista uma função g integrável em X tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad (n = 1,2,3,\ldots\,;\; x \in X). \qquad \text{A.28}$$

Então f é integrável em X e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu, \qquad \text{A.29}$$

ou seja, pode-se tomar o limite sob o sinal de integral.

Este é um dos mais potentes teoremas da teoria da integração de Lebesgue. Ressalte-se que, diferentemente de teoremas análogos envolvendo a integral de Riemann, a sequência (f_n) não precisa convergir uniformemente e pode até não ser convergente num conjunto de medida nula. Além disso, o conjunto X sobre o qual se efetua a integração pode ser limitado ou ilimitado.

Exemplo A.7.1

Seja $f_n(x) = nx(1-x)^n$ em $[0,1]$ e considere

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Note que $f_n(x) \to 0$ para todo $x \in [0,1]$ mas a convergência não é uniforme, pois f_n assume seu valor máximo em $x_n = 1/(n+1)$ e

$$f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n}{n+1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1}.$$

Consequentemente, o Teorema 7.3 não se aplica. No entanto, como

$$|f_n(x)| \leq f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \leq 1$$

e a função constante igual a 1 é integrável em $[0,1]$, o teorema da convergência dominada é aplicável e temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n \, dx = \int_0^1 [\lim_{n\to\infty} nx(1-x)^n]\, dx = 0.$$

Neste caso é possível fazer uma comprovação direta deste resultado porque uma integração por partes dá $\int_0^1 nx(1-x)^n\,dx = n/(n+1)(n+2)$.

Dentre as consequências do teorema da convergência dominada, vale a pena destacar um resultado muito útil que estabelece condições que garantem a validade da integração termo a termo de uma série de funções num espaço de medida arbitrário.

Teorema A.18 *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis em X tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n|\,d\mu < \infty. \tag{A.30}$$

Então a série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{A.31}$$

converge para quase todo $x \in X$, f é integrável em X e

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\,d\mu, \tag{A.32}$$

ou seja, a série pode ser integrada termo a termo.

Exemplo A.7.2

Calcular a integral

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx.$$

Como

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in [0,1),$$

temos

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ln x\,dx.$$

Defina f_n em $(0,1]$ por $f_n(x) = x^n \ln x$. Segue-se que $|f_n(x)| = -x^n \ln x$ e uma integração por partes fornece

$$\int_0^1 |f_n(x)|\,dx = -\int_0^1 x^n \ln x\,dx = -\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{dx}{x} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Como a série $\sum 1/(n+1)^2$ é convergente, a condição (A.30) do Teorema (A.18) é satisfeita e podemos escrever

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^n \ln x\, dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

A.8 *Diferenciação e Integração.*

O primeiro problema do vínculo entre diferenciação e integração na teoria de Lebesgue é determinar em que condições a igualdade

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \tag{A.33}$$

é válida.

Na teoria da integral de Riemann esta última igualdade é verdadeira se x é ponto de continuidade de f (vide Teorema 6.10). Na teoria de Lebesgue a igualdade é verdadeira sob condições mais gerais.

Teorema A.19 *Se f é integrável em $[a,b]$ e*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \le x \le b), \tag{A.34}$$

então $F'(x) = f(x)$ para quase todo x em $[a,b]$.

Embora não fique garantida a validade de $F'(x) = f(x)$ para *todo* x de $[a,b]$, este teorema é mais forte do que o teorema correspondente para a integral de Riemann porque prescinde da continuidade do integrando. Em suma, também na teoria de Lebesgue a diferenciação é a operação inversa da integração.

O segundo problema é o de determinar se a integração é a operação inversa da diferenciação ou, mais precisamente, estabelecer em que condições a igualdade

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

é válida. Isto equivale a perguntar se de $F'(x) = f(x)$ em quase toda parte, com f integrável, pode-se concluir que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$. A resposta é negativa.

Portanto, este segundo problema é mais delicado que o primeiro, e sua resolução requer a introdução de uma classe especial de funções.

Definição A.20 *Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita **absolutamente contínua** em $[a,b]$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon \qquad \text{A.35}$$

para toda coleção finita $\{(\alpha_i, \beta_i)\}$ de intervalos disjuntos contidos em $[a,b]$ com

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) < \delta. \qquad \text{A.36}$$

Note que toda função absolutamente contínua é uniformemente contínua (basta tomar $n = 1$).

Teorema A.21 *Uma função é absolutamente contínua se e somente se é uma integral indefinida, isto é, f é absolutamente contínua em $[a,b]$ se e somente se existe uma função g integrável em $[a,b]$ tal que*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt \qquad \text{A.37}$$

para todo $x \in [a,b]$.

Pelo Teorema A.19, se f é dada por (A.37) resulta que $f' = g$ q.t.p. em $[a,b]$, o que permite uma outra caracterização das funções absolutamente contínuas.

Teorema A.22 *Uma função f é a integral de sua derivada se e somente se f é absolutamente contínua. Em outras palavras, tem-se*

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a) \quad (a \le x \le b) \qquad \text{A.38}$$

se e somente se f é absolutamente contínua em $[a,b]$.

Se f é integrável e $F'(x) = f(x)$ em quase toda parte, infelizmente não se pode-se concluir que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ por uma razão sutil:

existem funções não constantes com derivada nula em quase toda parte. Surpreendentemente, existem até funções contínuas com derivada nula em quase toda parte que não são constantes (Gelbaum & Olmsted 1992). Tipicamente vale $f(x) - f(a) = f_s(x) + \int_a^x f'(t)\,dt$ com $f_s'(x) = 0$ para quase todo $x \in [a,b]$. Diz-se que f_s é a parte singular de f. Tem-se $f_s = 0$ se e somente se f é absolutamente contínua.

Por fim, consideremos mais dois resultados importantes envolvendo funções absolutamente contínuas.

Teorema A.23 *Se f e g são funções absolutamente contínuas no intervalo limitado $[a,b]$, então também o são:* (a) $\alpha f + \beta g$, *com* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; (b) fg.

Demonstração. Provaremos apenas a parte (b), pois a parte (a) é imediata. Como f e g são contínuas em $[a,b]$, existem números positivos M e N tais que $|f| < M$ e $|g| < N$. Como f e g são absolutamente contínuas, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, sempre que $\sum(\beta_i - \alpha_i) < \delta$, $\sum |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon/2N$ e $\sum |g(\beta_i) - g(\alpha_i)| < \epsilon/2M$. Neste caso,

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i)g(\beta_i) - f(\alpha_i)g(\alpha_i)| = \sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i)\big(g(\beta_i) - g(\alpha_i)\big) + g(\alpha_i)\big(f(\beta_i) - f(\alpha_i)\big)|$$
$$\leq M \sum_{i=1}^{n} |g(\beta_i) - g(\alpha_i)| + N \sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon \qquad \text{A.39}$$

e a demonstração nestá completa. ∎

Teorema A.24 (Integração por partes) *Se f e g são absolutamente contínuas no intervalo limitado $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f g'\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' g\,dx. \qquad \text{A.40}$$

Demonstração. Como f e g são absolutamente contínuas, f' e g' existem em quase toda parte e são integráveis em $[a,b]$. Segue-se que fg é diferenciável em quase toda parte com $(fg)' = f'g + fg'$ e, além disso, $(fg)'$ é integrável em $[a,b]$ porque $f'g$ e fg' são integráveis, pois f e g são limitadas. Portanto,

$$\int_a^b (fg' + f'g)\,dx = \int_a^b (fg)'\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \qquad \text{A.41}$$

porque fg é absolutamente contínua. ∎

A.9 *Medidas-Produto e Teorema de Fubini*

Sejam $(X,\mathscr{A},\mu)$ e $(Y,\mathscr{B},\nu)$ dois espaços de medida e considere o produto cartesiano $X\times Y$. Se $A\in\mathscr{A}$ e $B\in\mathscr{B}$ diz-se que $A\times B$ é um retângulo mensurável. Para cada retângulo mensurável $A\times B$ seja

$$\lambda(A\times B)=\mu(A)\,\nu(B)\,. \tag{A.42}$$

Define-se $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ como a menor σ-álgebra em $X\times Y$ que contém todos os retângulos mensuráveis. Prova-se que existe uma única medida $\mu\times\nu$ sobre $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ que coincide com λ quando restrita aos retângulos mensuráveis. Portanto, dada uma função $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ mensurável em $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ pode-se definir a integral

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu)\,. \tag{A.43}$$

Outra notação — que na prática costuma ser mais conveniente — para esta integral é

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu(x)\times\nu(y))\,. \tag{A.44}$$

Quando $X=Y=\mathbb{R}$ e μ e ν são a medida de Lebesgue, escrevemos simplesmente

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy \quad\text{ou}\quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy\,. \tag{A.45}$$

Dada uma função f sobre $X\times Y$ associamos a cada $x\in X$ a função f_x definida sobre Y por $f_x(y)=f(x,y)$. Analogamente, a cada $y\in Y$ associamos a função f^y definida sobre X por $f^y(x)=f(x,y)$. Prova-se que se f é mensurável em $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ então f_x é mensurável em $\mathscr{B}$ para todo $x\in X$ e f^y é mensurável em $\mathscr{A}$ para todo $y\in Y$.

Tipicamente, integrais múltiplas são calculadas como integrais iteradas. As integrais iteradas são

$$\int_X d\mu(x)\int_Y f(x,y)d\nu(y)=\int_X d\mu(x)\int_Y f_x d\nu \tag{A.46}$$

e

$$\int_Y d\nu(y)\int_X f(x,y)d\mu(x)=\int_Y d\nu(y)\int_X f^y d\mu\,. \tag{A.47}$$

Para que as integrais iteradas coincidam com a integral múltipla é preciso que as integrais iteradas não dependam da ordem em que as integrações sucessivas

são efetuadas. As condições mais gerais que permitem a troca da ordem de integração são estipuladas num teorema importante, que apresentaremos na forma que nos parece mais útil para as aplicações. Antes, porém, uma definição é necessária.

Definição A.25 *Uma medida μ no espaço mensurável $(X,\mathscr{A})$ é dita σ-finita se existe uma sequência $\{X_n\}$ de conjuntos em $\mathscr{A}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ e $\mu(X_n) < \infty$ para todo n. Neste caso, dizemos que $(X,\mathscr{A},\mu)$ é um espaço de medida σ-finito.*

Exemplo A.9.1
A medida de Lebesgue em $(-\infty,\infty)$ é σ-finita: basta tomar a sequência de conjuntos $X_n = (-n, n)$.

Exercício A.9.1
Mostre que a medida de contagem (definida no Exemplo A.2.1) num conjunto não enumerável não é σ-finita.

Teorema A.26 (Fubini) *Sejam $(X,\mathscr{A},\mu)$ e $(Y,\mathscr{B},\nu)$ espaços de medida σ-finitos e seja f uma função complexa mensurável em $X \times Y$. Se*

$$\int_X d\mu(x) \int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y) < \infty \quad ou \quad \int_Y d\nu(y) \int_X |f(x,y)|\, d\mu(x) < \infty \qquad \text{A.48}$$

então f é integrável em $X \times Y$ e

$$\int_X d\mu(x) \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) = \int_Y d\nu(y) \int_X f(x,y) d\mu(x) = \int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu), \qquad \text{A.49}$$

isto é, as duas integrais iteradas são finitas, iguais entre si e têm o mesmo valor que a integral dupla. Reciprocamente, se f é integrável em $X \times Y$ então (A.49) *se verifica.*

A parte deste teorema que costuma ser mais útil na prática pode ser assim resumida: a ordem de integração pode ser invertida para $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ mensurável sempre que uma das integrais iteradas de $|f|$ é finita. Neste caso, as integrais iteradas de f são iguais entre si e iguais à integral dupla de f.

Exemplo A.9.2
Calcular a integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx, \quad a,b > 0.$$

Podemos escrever

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \int_0^\infty dx \int_a^b e^{-xy}\, dy.$$

Tendo em vista que $e^{-xy} > 0$, o teorema de Fubini assegura que é permitida a troca da ordem de integração se a integral iterada com a ordem de integração invertida for finita. Como

$$\int_a^b dy \int_0^\infty e^{-xy}\, dx = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a} < \infty,$$

segue-se que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \ln\frac{b}{a}, \quad a,b > 0.$$

A.10 *Espaços L^p*

O conjunto $\mathscr{L}^p(X, d\mu)$ das funções f tais que $\int_X |f|^p\, d\mu < \infty$, onde $1 \leq p < \infty$, pode ser dotado de uma norma, conforme descrito na Seção 8.8.

Definição A.27 *O espaço $L^p(X, d\mu)$, com $1 \leq p < \infty$, é o espaço normado com a norma definida por*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, d\mu \right)^{1/p} \tag{A.50}$$

e com a identificação das funções que só diferem num conjunto de medida nula.

A identificação das funções que só diferem num conjunto de medida nula[4] e a desigualdade de Minkowski (8.13) asseguram que (A.50) define uma norma.

4. A condição $\|f\|_p = 0 \Longrightarrow f = 0$ só é satisfeita se qualquer função nula em quase toda parte for identificada com a função identicamente nula.

Teorema A.28 (Riesz-Fischer) *$L^p(X, d\mu)$ é um espaço normado completo para $1 \le p < \infty$.*

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $L^p(X, d\mu)$. Precisamos provar que (f_n) converge na norma de $L^p(X, d\mu)$ para algum elemento de $L^p(X, d\mu)$. Como vimos na demonstração do Teorema 4.15, basta provar que alguma subsequência de (f_n) converge para algum elemento de $L^p(X, d\mu)$. Seja (f_{n_k}) uma subsequência tal que

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p < \frac{1}{2^k}, \tag{A.51}$$

e seja $g_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}}$, com $f_{n_0} = 0$. Seja G a função positiva definida por

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|. \tag{A.52}$$

Para cada x, esta série de termos positivos é convergente, se for limitada, ou é igual a ∞. Pela desigualdade de Minkowski,

$$\Big|\Big|\sum_{k=1}^{n} |g_k|\Big|\Big|_p \le ||f_{n_1}||_p + \sum_{k=1}^{n} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p < ||f_{n_1}||_p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = ||f_{n_1}||_p + \frac{1}{2} = M. \tag{A.53}$$

Com $G_n = \sum_{k=1}^{n} |g_k|$, a sequência (G_n) é monótona crescente, converge para G e, por (A.53),

$$\int_X |G_n|^p d\mu \le M^p. \tag{A.54}$$

Logo, pelo teorema da convergência monótona,

$$\int_X |G|^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X |G_n|^p d\mu \le M^p, \tag{A.55}$$

de modo que G pertence a $L^p(X, d\mu)$. Consequentemente, $G(x) < \infty$ para quase todo x e a série

$$\sum_{l=1}^{\infty} g_l(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{k} (f_{n_l} - f_{n_{l-1}}) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \tag{A.56}$$

converge absolutamente em quase toda parte. Seja $f(x)$ o limite acima. Como $|f_{n_k}(x)| \le G(x)$, segue-se que $|f(x)| \le G(x)$. Portanto, $f \in L^p(X, d\mu)$ e, além disso, $|f(x) - f_{n_k}(x)|^p \le 2^p G(x)^p$. Tendo em vista que $|f(x) - f_{n_k}(x)|^p$ converge para zero em quase toda parte quando $k \to \infty$ e $|f(x) - f_{n_k}(x)|^p \le$

$2^p G(x)^p$ com $G^p \in L^1(X, d\mu)$, o teorema da convergência dominada assegura que $\int_X |f - f_{n_k}|^p d\mu \to 0$ para $k \to \infty$. Portanto, $\lim_{k\to\infty} \|f - f_{n_k}\|_p = 0$ e a demonstração está completa. ∎

Um resultado interessante foi estabelecido no curso da demonstração deste teorema.

Corolário A.29 *Se* $\|f_n - f\|_p \to 0$ *em* $L^p(X, d\mu)$, *então existe uma subsequência de* (f_n) *que converge pontualmente para* f *em quase toda parte.*

A demonstração da completeza dos espaços L^p, que depende das propriedades da integral de Lebesgue de forma essencial, selou a vitória definitiva da teoria da integração de Lebesgue sobre a de Riemann.

Problemas

A.1. Seja (A_n) uma sequência de conjuntos mensuráveis num espaço de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Prove que

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Sugestão: Defina $\tilde{A}_1 = A_1$, $\tilde{A}_2 = A_2 \setminus A_1$ e $\tilde{A}_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ para $n \ge 2$; prove que $\tilde{A}_m \cap \tilde{A}_n = \varnothing$ se $m \ne n$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n$.

A.2. Seja X um conjunto não enumerável e $\mathscr{A}$ a coleção de todos os subconjuntos de X. Defina $\varphi : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ por $\varphi(A) = \infty$ se A não é enumerável e $\varphi(A) = 0$ se A é enumerável. A aplicação φ é uma medida?

A.3. Dê um exemplo de uma sequência de intervalos (I_n) da reta real com $m(I_n) = \infty$ para todo n e $m\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\big) = 0$.

A.4. Sejam a e b números complexos e $p \ge 1$. (a) Prove que

$$|a + b|^p \le 2^p (|a|^p + |b|^p).$$

Sugestão: $|a| + |b| \le 2 \max\{|a|, |b|\}$. (b) Prove que se f e g pertencem a $L^p(X, d\mu)$ então $f + g$ também pertence a $L^p(X, d\mu)$.

A.5. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, suponha que f' exista e seja limitada no intervalo limitado $[a,b]$. Prove que f é absolutamente contínua em $[a,b]$ conforme a Definição A.20.

A.6. Usando a desigualdade de Hölder (8.12), prove que se f é absolutamente contínua em $[a,b]$ e $f' \in L^p(a,b)$ com $p > 1$, então f é lipschitziana de ordem $\alpha = (p-1)/p$ em $[a,b]$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_p |x-y|^\alpha .$$

A.7. Seja $[a,b]$ um intervalo limitado da reta real. Prove que se $f \in L^2(a,b)$ então $f \in L^1(a,b)$. Sugestão: $(1 - |f|)^2 \geq 0$. A recíproca é verdadeira?

A.8. Por meio do teorema de Fubini, justifique a igualdade

$$\int_0^\infty dx \int_0^1 e^{-x} \operatorname{sen} 2xy\, dy = \int_0^1 dy \int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen} 2xy\, dx$$

e prove que

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\, dx = \frac{\ln 5}{4} .$$

A.9. Prove que

$$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} px - \tan^{-1} qx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{p}{q}, \quad p,q > 0 .$$

A.10. Prove que, no sentido de uma integral de Riemann imprópria,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx = \ln \frac{b}{a}, \quad a,b > 0 .$$

Sugestão: lema de Riemann-Lebesgue, Problema 9.3.

A.11. Prove, por cálculo direto, que

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad a,b > 0 .$$

Use este resultado para calcular

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\operatorname{sen} bx}{x} .$$

A.12. Para n inteiro, a função de Bessel J_n é dada por

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\,\text{sen}\,\theta)\,d\theta .$$

Calcule

$$\int_0^{\infty} J_0(x)e^{-px}\,dx, \quad p > 0 .$$

Informação que pode ser útil:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a > 0,\ a > |b| .$$

A.13. Dê um exemplo de uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $f \notin L^2(\mathbb{R})$. Dê um exemplo de uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

A.14. Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$ e suponha que $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha}|f(x)|^2 dx < \infty$ para algum número real $\alpha > 0$. Prove que $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\beta}|f(x)|^2 dx < \infty$ para todo número real β tal que $0 < \beta < \alpha$.

A.15. Sejam E um conjunto mensurável e p,q expoentes conjugados, isto é, números maiores que 1 tais que $1/p + 1/q = 1$. Se (f_n) é uma sequência de funções que converge para f em $L^p(E)$ e (g_n) é uma sequência de funções que converge para g em $L^q(E)$, prove que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)g_n(x)\,dx = \int_E f(x)g(x)\,dx .$$

Sugestão: escreva $f_n g_n - fg = (f_n - f)g_n + f(g_n - g)$ e use a desigualdade de Hölder.

B

Teoremas de Ponto Fixo e Equações Integrais

Este apêndice tem como pré-requisitos as Seções 7.5, 10.1, 11.2 e o Apêndice A.

Os teoremas da Seção 7.5 valem somente se o intervalo de integração é limitado. Esta restrição pode ser eliminada se o núcleo K da equação integral for uma função de quadrado integrável e buscarmos soluções ϕ de quadrado integrável.

B.1 *Núcleos de Quadrado Integrável*

O núcleo $K : (a,b) \times (a,b) \to \mathbb{C}$ é de quadrado integrável se

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dx ds < \infty. \tag{B.1}$$

Neste caso, o operador linear $\mathbb{K}$ definido por

$$(\mathbb{K}\phi)(x) = \int_a^b K(x,s)\,\phi(s)\,ds, \quad \phi \in L^2(a,b), \tag{B.2}$$

é limitado. Com efeito, pela desigualdade de Schwarz,[1]

$$|(\mathbb{K}\phi)(x)|^2 \leq \int_a^b |K(x,s)|^2 ds \int_a^b |\phi(s)|^2 ds, \tag{B.3}$$

1. A integral $\int_a^b |K(x,s)|^2 ds$ existe pelo teorema de Fubini (Apêndice A).

donde

$$||\mathbb{K}\phi||^2 = \int_a^b |(\mathbb{K}\phi)(x)|^2 dx \leq \int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dx ds ||\phi||^2 = ||K||^2 ||\phi||^2, \quad \text{B.4}$$

onde

$$||K|| = \left[\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dx ds \right]^{1/2}. \quad \text{B.5}$$

B.2 *Operadores de Contração e Pontos Fixos*

O estudo de uma certa classe de operadores em espaços de Hilbert permite demonstrações simples de teoremas de existência e unicidade para equações integrais, incluindo equações não lineares.

Definição B.1 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e T um operador não necessariamente linear definido sobre todos os pontos de $\mathcal{H}$. Diz-se que T é um* ***operador de contração*** *ou, simplesmente, uma* ***contração*** *se existe uma constante positiva $\alpha < 1$ tal que*

$$||T\phi_1 - T\phi_2|| \leq \alpha ||\phi_1 - \phi_2|| \quad \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}. \quad \text{B.6}$$

Note que um operador de contração é automaticamente contínuo e a distância entre ϕ_1 e ϕ_2 é reduzida pela ação de T.

Teorema B.2 *Se T é uma contração em $\mathcal{H}$, a equação*

$$T\phi = \phi \quad \text{B.7}$$

tem uma única solução em $\mathcal{H}$, chamada de ***ponto fixo*** *de T.*

Demonstração. Considere a sequência (ϕ_n) onde $\phi_0 \in \mathcal{H}$ é arbitrário e

$$\phi_{n+1} = T\phi_n, \quad n = 0,1,2,\ldots. \quad \text{B.8}$$

Note que

$$||\phi_{n+1} - \phi_n|| = ||T\phi_n - T\phi_{n-1}|| \leq \alpha ||\phi_n - \phi_{n-1}||, \quad \text{B.9}$$

cuja aplicação reiterada conduz a

$$||\phi_{n+1} - \phi_n|| \leq \alpha^2 ||\phi_{n-1} - \phi_{n-2}|| \leq \ldots \leq \alpha^n ||\phi_1 - \phi_0||. \quad \text{B.10}$$

Consequentemente, se $n > m$,

$$||\phi_n - \phi_m|| = ||(\phi_n - \phi_{n-1}) + (\phi_{n-1} - \phi_{n-2}) + \ldots + (\phi_{m+1} - \phi_m)|| \quad \text{B.11}$$

$$\leq (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots + \alpha^m)||\phi_1 - \phi_0|| \quad \text{B.12}$$

$$\leq \Big(\sum_{l=m}^{\infty} \alpha^l\Big)||\phi_1 - \phi_0|| = \frac{\alpha^m}{1-\alpha}||\phi_1 - \phi_0|| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \text{B.13}$$

Segue-se que (ϕ_n) é uma sequência de Cauchy e, portanto, possui um limite ϕ. Esse limite é uma solução de (B.7) porque

$$T\phi = T\big(\lim_{n\to\infty} \phi_n\big) = \lim_{n\to\infty} T\phi_n = \lim_{n\to\infty} \phi_{n+1} = \phi, \quad \text{B.14}$$

onde usamos a continuidade de T. Para estabelecer a unicidade, sejam ϕ e ψ duas soluções de (B.7). Então,

$$||\phi - \psi|| = ||T\phi - T\psi|| \leq \alpha||\phi - \psi|| \implies (1-\alpha)||\phi - \psi|| \leq 0. \quad \text{B.15}$$

Como $1-\alpha > 0$ e $||\phi-\psi||$ é não negativo, a única solução possível desta última inequação é $||\phi - \psi|| = 0$, isto é, $\phi = \psi$. ∎

B.3 *Equação Integral de Fredholm*

Como primeira aplicação deste teorema de ponto fixo a equações integrais, consideremos a equação integral de Fredholm (7.11) escrita na forma

$$\phi = f + \lambda \mathbb{K}\phi, \quad \text{B.16}$$

onde $f \in L^2(a,b)$ e o operador linear $\mathbb{K}$ está definido por (B.2). Em termos do operador não linear $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ definido por

$$T\phi = f + \lambda \mathbb{K}\phi, \quad \text{B.17}$$

podemos reescrever (B.16) na forma $T\phi = \phi$. Se o núcleo K é de quadrado integrável e $|\lambda|\,||K|| < 1$ temos

$$||T\phi_1 - T\phi_2|| = |\lambda|\,||\mathbb{K}\phi_1 - \mathbb{K}\phi_2|| \leq |\lambda|\,||K||\,||\phi_1 - \phi_2|| \quad \text{B.18}$$

e T é uma contração. Fica, assim, estabelecido um resultado significativo.

Teorema B.3 *Se K é um núcleo de quadrado integrável e $f \in L^2(a,b)$, a equação integral de Fredholm* (7.11) *possui uma única solução $\phi \in L^2(a,b)$ se* $|\lambda|\,||K|| < 1$.

Exercício B.3.1
Formalmente, a solução de (B.16) é

$$\phi = (I - \lambda\mathbb{K})^{-1} f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathbb{K}^n f. \qquad \text{B.19}$$

Se $|\lambda| \|K\| < 1$, mostre que esta expansão em série de potências é válida porque o segundo membro de (B.19) é o limite da sequência convergente $(T^n f)$ com T definido por (B.17).

B.4 *Equação Integral Não Linear*

O Teorema B.3 também se aplica à equação integral não linear

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s,\phi(s))\, ds \qquad \text{B.20}$$

desde que K preencha requisitos apropriados.

Teorema B.4 *Suponha que*

$$|K(x,s,t_1) - K(x,s,t_2)| \leq N(x,s)\, |t_1 - t_2| \qquad \text{B.21}$$

com

$$\int_a^b \int_a^b |N(x,s)|^2\, dx ds = P^2 < \infty, \quad P > 0. \qquad \text{B.22}$$

Então, se $f \in L^2(a,b)$ *e* $|\lambda| P < 1$, *a equação integral* (B.20) *possui uma única solução* $\phi \in L^2(a,b)$.

Demonstração. Com T definido por

$$(T\phi)(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s,\phi(s))\, ds \qquad \text{B.23}$$

temos

$$\begin{aligned} \|T\phi_1 - T\phi_2\|^2 &= |\lambda|^2 \int_a^b dx \left| \int_a^b \left[K(x,s,\phi_1(s)) - K(x,s,\phi_2(s)) \right] ds \right|^2 \\ &\leq |\lambda|^2 \int_a^b dx \left[\int_a^b |K(x,s,\phi_1(s)) - K(x,s,\phi_2(s))|\, ds \right]^2 \qquad \text{B.24} \\ &\leq |\lambda|^2 \int_a^b dx \left[\int_a^b N(x,s) |\phi_1(s) - \phi_2(s)|\, ds \right]^2. \end{aligned}$$

Com o emprego da desigualdade de Schwarz podemos escrever

$$\begin{aligned} \|T\phi_1 - T\phi_2\|^2 &\leq |\lambda|^2 \int_a^b dx \left[\int_a^b ds |N(x,s)|^2 \int_a^b ds |\phi_1(s) - \phi_2(s)|^2 \right] \\ &= |\lambda|^2 \int_a^b \int_a^b |N(x,s)|^2 dx ds \, \|\phi_1 - \phi_2\|^2 \\ &= |\lambda|^2 P^2 \|\phi_1 - \phi_2\|^2 , \end{aligned} \tag{B.25}$$

donde

$$\|T\phi_1 - T\phi_2\| \leq |\lambda| P \|\phi_1 - \phi_2\| . \tag{B.26}$$

Segue-se que T é um operador de contração se $|\lambda| P < 1$ e, em virtude do Teorema B.2, a equação (B.20) possui uma única solução em $L^2(a,b)$. ∎

Este teorema também cobre o caso linear, para o qual $K(x,s,\phi(s)) = K(x,s)\phi(s)$ e a função $(x,s) \mapsto K(x,s)$ é de quadrado integrável.

B.5 *Equação Integral de Volterra*

A fim de lidar com a equação de Volterra, é necessário lançar mão de uma versão generalizada do teorema do ponto fixo.

Teorema B.5 *Seja T um operador definido em todo o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se T^n é um operador de contração para algum inteiro positivo n, então T possui um único ponto fixo em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Se T^n é um operador de contração, o Teorema B.2 assegura que existe um único $\phi \in \mathcal{H}$ tal que

$$T^n \phi = \phi \tag{B.27}$$

e, além disso, $\phi = \lim_{k\to\infty} T^{kn}\phi_0$ qualquer que seja $\phi_0 \in \mathcal{H}$. Tomando $\phi_0 = T\phi$ obtém-se

$$\phi = \lim_{k\to\infty} T^{kn} T\phi = \lim_{k\to\infty} T T^{kn} \phi = \lim_{k\to\infty} T \underbrace{T^n \cdots T^n}_{k \text{ vezes}} \phi = \lim_{k\to\infty} T\phi = T\phi , \tag{B.28}$$

de modo que ϕ é ponto fixo de T. Para provar a unicidade, de $T\phi_1 = \phi_1$ e $T\phi_2 = \phi_2$ deduzimos

$$T^n \phi_1 = \phi_1 \quad \text{e} \quad T^n \phi_2 = \phi_2 , \tag{B.29}$$

donde $\phi_1 = \phi_2$ porque T^n é uma contração. ∎

Teorema B.6 *Se $f \in L^2(a,b)$ e K é um núcleo de quadrado integrável, a equação de Volterra*

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s)\phi(s)ds \quad (a \leq x \leq b) \tag{B.30}$$

tem uma única solução $\phi \in L^2(a,b)$ para qualquer λ.

Demonstração. Defina

$$A(x)^2 = \int_a^b |K(x,s)|^2 ds, \quad B(s)^2 = \int_a^b |K(x,s)|^2 dx. \tag{B.31}$$

Por hipótese, A e B são de quadrado integrável em $I = (a,b)$ porque K é de quadrado integrável em $I \times I$. Consequentemente, existe $N > 0$ tal que

$$\int_a^b A(x)^2 dx \leq N, \quad \int_a^b B(s)^2 ds \leq N. \tag{B.32}$$

Defina, ainda,

$$\rho(x) = \int_a^x A(t)^2 dt \leq \int_a^b A(t)^2 dt \leq N. \tag{B.33}$$

Escreva (B.30) na forma

$$\phi = T\phi, \quad T\phi = f + \lambda\mathbb{K}\phi, \quad (\mathbb{K}\phi)(x) = \int_a^x K(x,s)\phi(s)ds. \tag{B.34}$$

Portanto,

$$T^n\phi = f + \lambda\mathbb{K}f + \cdots + \lambda^{n-1}\mathbb{K}^{n-1}f + \lambda^n\mathbb{K}^n\phi, \tag{B.35}$$

donde

$$||T^n\phi_1 - T^n\phi_2|| = |\lambda|^n ||\mathbb{K}^n\phi_1 - \mathbb{K}^n\phi_2|| \leq |\lambda|^n ||K_n|| ||\phi_1 - \phi_2||. \tag{B.36}$$

A fim de estimar $||K_n||$, note que o núcleo de $\mathbb{K}^2$ é $K_2(x,s) = \int_s^x K(x,t)K(t,s)dt$ e, pela desigualdade de Schwarz,

$$|K_2(x,s)|^2 \leq \int_s^x |K(x,t)|^2 dt \int_s^x |K(t,s)|^2 dt \leq A(x)^2 B(s)^2. \tag{B.37}$$

Analogamente, como $K_{n+1}(x,s) = \int_s^x K(x,t)K_n(t,s)dt$, temos

$$|K_3(x,s)|^2 \leq \int_s^x |K(x,t)|^2 dt \int_s^x |K_2(t,s)|^2 dt \tag{B.38}$$

$$\leq A(x)^2 B(s)^2 \int_s^x A(t)^2 dt = A(x)^2 B(s)^2 \left[\rho(x) - \rho(s)\right]. \tag{B.39}$$

Notando que $\rho'(x) = A(x)^2$, um argumento indutivo mostra que, para $n \geq 2$,

$$|K_n(x,s)|^2 \leq A(x)^2 B(s)^2 \frac{[\rho(x) - \rho(s)]^{n-2}}{(n-2)!}. \tag{B.40}$$

Em vista destes resultados, observando que $0 \leq \rho(x) - \rho(s) \leq \rho(x) \leq N$, resulta

$$\begin{aligned} ||K_n||^2 &= \int_a^b \int_a^b |K_n(x,s)|^2 \, dx ds \\ &\leq \frac{N^{n-2}}{(n-2)!} \int_a^b A(x)^2 dx \int_a^b B(s)^2 ds \\ &\leq \frac{N^n}{(n-2)!}. \end{aligned} \tag{B.41}$$

Uma vez que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\lambda|^{2n} N^n}{(n-2)!} = 0, \tag{B.42}$$

segue-se que $|\lambda|^n ||K_n|| < 1$ para n suficientemente grande e T^n é uma contração. ▮

Exercício B.5.1
Dado $\mathbb{K}$ definido por (B.34), verifique que os núcleos dos operadores integrais $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^{n+1}$ estão ligados por $K_{n+1}(x,s) = \int_s^x K(x,t) K_n(t,s) dt$. Prove (B.40).

Leituras Adicionais Selecionadas[2]

Hochstadt, H. 1973 *Integral Equations.*
Riesz, F. e Sz.-Nagy, B. 1955 *Functional Analysis.*
Smithies, F. 1958 *Integral Equations.*

2. A lista completa de referências, com plenos detalhes bibliográficos, encontra-se na Bibliografia no fim do livro.

Problemas

B.1. Encontre em $L^p(0,\pi/2)$, para $1 \leq p < \infty$, as soluções não triviais da equação integral

$$\phi(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} \cos(x-y)\,\phi(y)\,dy.$$

B.2. Para que valores de λ a equação integral

$$\phi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x+t)\,\phi(t)\,dt = 1$$

tem soluções em $C[0,\pi]$? Encontre todas as soluções que houver.

B.3. Resolva a equação integral

$$\phi(x) = x - \int_0^x 2t\,\phi(t)\,dt$$

em $C[0,1]$.

B.4. Resolva a equação integral

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 e^{x-y}\,\phi(y)\,dy = f(x)$$

em $C[0,1]$.

B.5. Se

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |N(x,s)|^2\,dx\,ds = 1,$$

prove que a equação integral

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(x,s)}{1+|\phi(s)|}\,ds$$

com $f \in L^2(\mathbb{R})$ possui uma única solução em $L^2(\mathbb{R})$ se $|\lambda| < 1$.

Bibliografia

Ahlfors, L. V. 1981 *Complex Analysis* (McGraw-Hill, Auckland), 3ª edição.

Akhiezer, N. I. e Glazman, I. M. 1963 *Theory of Linear Operators in Hilbert Space* (Dover, New York).

Apostol, T. M. 2006 *Calculus*, 2 Vols. (Wiley, New Delhi), 2ª edição.

Apostol, T. M. 1974 *Mathematical Analysis* (Addison-Wesley, Reading, MA), 2ª edição.

Araújo, V. S., Coutinho, F. A. B. e Perez, J. F. 2004 *Operator domains and self-adjoint operators*, American Journal of Physics **72**, 203.

Ávila, G. 1999 *Introdução à Análise Matemática* (Edgard Blücher, São Paulo, SP), 2ª edição.

Bachman, G. e Narici, L. 2000 *Functional Analysis* (Dover, New York).

Barata, J. C. A. 2012 *Curso de Fisica Matemática.* Disponível como arquivo eletrônico na Internet: http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/notas_de_aula.html.

Bassi, A., Lochan, K., Satin, S., Singh, T. P. e Ulbricht, H. 2012 *Models of Wave Function Collapse, Underlying Theories, and Experimental Tests.* Disponível como arquivo eletrônico na Internet: arXiv:quant-ph/1204.4325v2.

Bell, E. T. 1972 *The Development of Mathematics* (Dover, New York).

Bernkopf, M. 1966 *The Development of Function Spaces with Particular Reference to their Origins in the Integral Equation Theory*, Archive for the History of Exact Sciences **80**, 1.

Birkhoff, G. e Mac Lane, S. 1977 *A Survey of Modern Algebra* (Macmillan, New York).

Bloch, E. D. 2000 *Proofs and Fundamentals: A First Course in Abstract Mathematics* (Birkhäuser, Boston).

Boas, Jr., R. P. 1996 *A Primer of Real Functions* (The Mathematical Association of America, Washington), 4ª edição.

Boccara, N. 1990 *Functional Analysis: An Introduction for Physicists* (Academic Press, Boston).

Bognár, M. 2011 *The Sorgenfrey line is non-metrizable*, Acta Mathematica Hungarica **133**, 185.

Bogolubov, N. N., Logunov, A. A. e Todorov, I. T. 1975 *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory* (W. A. Benjamin, Reading, MA).

Bonneau, G., Faraut, J. e Valent, G. 2001 *Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics*, American Journal of Physics **69**, 322.

Boyer, C. B. 1949 *The History of the Calculus and Its Conceptual Development* (Dover, New York).

Boyer, C. B. e Merzbach, U. C. 1991 *A History of Mathematics* (Wiley, New York), 2ª edição.

Bressoud, D. M. 2008 *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration* (Cambridge University Press, Cambridge).

Cantor, G. 1915 *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers* (Dover, New York).

Capri, A. Z. 1977 *Self-Adjointness and Spontaneously Broken Symmetry*, American Journal of Physics **45**, 823.

Capri, A. Z. 2002 *Nonrelativistic Quantum Mechanics* (World Scientific, Singapore), 3ª edição.

Carruthers, P. e Nieto, M. M. 1965 *Coherent States and the Number-Phase Uncertainty Relation*, Physical Review Letters **14**, 387.

Carruthers, P. e Nieto, M. M. 1968 *Phase and Angle Variables in Quantum Mechanics*, Reviews of Modern Physics **40**, 411.

Castro Jr., A. A. 2004 *Curso de Teoria da Medida* (IMPA, Rio de Janeiro).

Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. e Laloë, F. 1977 *Quantum Mechanics*, 2 Vols. (Wiley, New York).

Costara, C. e Popa, D. 2003 *Exercises in Functional Analysis* (Springer, New York).

Courant, R. e Hilbert, D. 1953 *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I (Interscience, New York).

Courant, R. e John, F. 1999 *Introduction to Calculus and Analysis*, Vols. I, II/1 e II/2 (Springer, New York).

Davey, K. 2003 *Is Mathematical Rigor Necessary in Physics?*, British Journal for the Philosophy of Science **54**, 439.

Dedekind, R. 1963 *Essays on the Theory of Numbers* (Dover, New York).

de Oliveira, C. R. 2009 *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics* (Birkhäuser, Berlin).

Dienes, P. 1957 *The Taylor Series* (Dover, New York).

Dunham, W. 2005 *The Calculus Gallery* (Princeton University Press, New Jersey).

Eccles, P. J. 1997 *An Introduction to Mathematical Reasoning* (Cambridge University Press, Cambridge).

Edwards Jr., C. H. 1982 *The Historical Development of the Calculus* (Springer, New York).

Eidelman, Y., Milman, V. e Tsolomitis, A. 1997 *Functional Analysis: An Introduction* (American Mathematical Society, Providence).

Esteve, J. G. 1986 *Anomalies in the conservation laws in the Hamiltonian formalism*, Physical Review D **34**, 674.

Esteve, J. G. 2002 *Origin of the anomalies: The modified Heisenberg equation*, Physical Review D **66**, 125013.

Eves, H. 1990a *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics* (Dover, New York), 3ª edição.

Eves, H. 1990b *Introdução à História da Matemática* (Editora Unicamp, Campinas).

Eyges, L. 1972 *The Classical Electromagnetic Field* (Dover, New York).

Fernandez, P. J. 1996 *Medida e Integração* (IMPA, Rio de Janeiro).

Figueiredo, D. G. 1996 *Análise I* (Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro), 2ª edição.

Figueiredo, D. G. 2011 *Números Irracionais e Transcendentes* (Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro), 3ª edição.

Figueiredo, D. G. 2003 *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais* (IMPA, Rio de Janeiro), 4ª edição.

Garbaczewski, P. e Karkowski, W. 2004 *Impenetrable barriers and canonical quantization*, American Journal of Physics **72**, 924. Disponível como arquivo eletrônico na Internet: arXiv:math-ph/0310023.

Gelbaum, B. R. e Olmsted, J. M. H. 1992 *Counterexamples in Analysis* (Dover, New York).

Geroch, R. 1985 *Mathematical Physics* (University of Chicago Press, Chicago).

Gieres, F. 2000 *Mathematical surprises and Dirac's formalism in quantum mechanics*, Reports on Progress in Physics **63**, 1893. Disponível como arquivo eletrônico na Internet: arXiv:quant-ph/9907069.

Gleason, A. M. 1991 *Fundamentals of Abstract Analysis* (Jones and Bartlett, Boston).

Goldberger, M. L. e Watson, K. M. 1975 *Collision Theory* (R. E. Krieger Publishing, New York).

Griffiths, D. J. 1995 *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall, New Jersey).

Gustafson, S. J. e Sigal, I. M. 2003 *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics* (Springer, New York).

Haaser, N. B. e Sullivan, A. J. 1991 *Real Analysis* (Dover, New York).

Hairer, E. e Wanner, G. 1996 *Analysis by Its History* (Springer, New York).

Halmos, P. R. 1974 *Naive Set Theory* (Springer, New York).

Hardy, G. H. 1992 *A Course of Pure Mathematics* (Cambridge University Press, Cambridge).

Hardy, G. H. 2012 *A Mathematician's Apology* (Cambridge University Press, Cambridge).

Hawkins, T. 1975 *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development* (Chelsea Publishing Company, New York).

Helmberg, G. 1997 *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space* (Dover, New York).

Herrlich, H. 2006 *Axiom of Choice* (Springer, Berlin).

Higgins, J. R. 1977 *Completeness and Basis Properties of Sets of Special Functions* (Cambridge University Press, Cambridge).

Hilbert, D. 1902 *Mathematical Problems*, Bulletin of the American Mathematical Society **8**, 437.

Hill, R. N. 1973 *A Paradox Involving the Quantum Mechanical Ehrenfest Theorem*, American Journal of Physics **41**, 736.

Hochstadt, H. 1973 *Integral Equations* (Wiley, New York).

Hocking, J. S. e Young, G. S. 1961 *Topology* (Dover, New York).

Isnard, C. 2009 *Introdução à Medida e Integração* (IMPA, Rio de Janeiro).

Jackson, J. D. 1999 *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York), 3ª edição.

Jaffe, A. M. 1969 *Whither Axiomatic Field Theory*, Reviews of Modern Physics **41**, 576.

Jones, J. P. e Toporowski, S. 1973 *Irrational Numbers*, American Mathematical Monthly **80**, 423.

Johnsonbaugh, R. e Pfaffenberger, W. E. 2002 *Foundations of Mathematical Analysis* (Dover, New York).

Jordan, T. F. 1969 *Linear Operators for Quantum Mechanics* (Wiley, New York).

Jost, R. 1965 *The General Theory of Quantized Fields* (American Mathematical Society, Rhode Island).

Judge, D. e Lewis, J. T. 1963 *On the Commutator* $[L_z, \varphi]_-$, Physics Letters **5**, 190.

Judge, D. 1964 *On the Uncertainty Relation for Angle Variables*, Nuovo Cimento **31**, 332.

Kastrup, H. A. 2006 *Quantization of the canonically conjugate pair angle and orbital angular momentum*, Physical Review A **73**, 052104. Disponível como arquivo eletrônico na Internet: arXiv:quant-ph/0510234.

Kato, T. 1976 *Perturbation Theory for Linear Operators* (Springer, New York), 2ª edição.

Kitchen, Jr., J. W. 1968 *Calculus of One Variable* (Addison-Wesley, Reading).

Kleene, S. C. 1967 *Mathematical Logic* (Wiley, New York).

Klein, J. R. 1980 *Do Free Quantum Mechanical Wave Packets Always Spread?*, American Journal of Physics **48**, 1035.

Kolmogorov, A. N. e Fomin, S. V. 1972 *Elementos de la Teoría de Funciones y del Analisis Funcional* (Mir, Moscou).

Kreyszig, E. 1978 *Introductory Functional Analysis With Applications* (Wiley, New York).

Leite Lopes, J. 1960 *Fundamentos da Eletrodinâmica Clássica* (Universidade do Brasil, Rio de Janeiro).

Lemos, N. A. 1996 *Singularities in a Scalar Field Quantum Cosmology*, Physical Review D**53**, 4275.

Lemos, N. A. 2010 *Três Mitos Sobre a "Função" Delta de Dirac*, Revista Brasileira de Ensino de Física **32**, 4701.

Lieber, M. 1972 *An Operator Domain Paradox and the Relativistic Correction to Energy Levels*, American Journal of Physics **40**, 1335.

Lima, E. L. 1993 *Espaços Métricos* (IMPA, Rio de Janeiro).

Lima, E. L. 2004 *Curso de Análise*, Vol. 1 (IMPA, Rio de Janeiro).

Lins Neto, A. 1996 *Funções de uma Variável Complexa* (IMPA, Rio de Janeiro).

Lusternik, L. A. e Sobolev, V. J. 1974 *Elements of Functional Analysis* (Hindustan Publishing Corporation, Delhi).

McShane, E. J. 1944 *Integration* (Princeton University Press, Princeton).

Messiah, A. 1958 *Quantum Mechanics* (Wiley, New York).

Munkres, W. 2000 *Topology* (Prentice Hall, NJ), 2ª edição.

Nussenzveig, H. M. 1975 *Notas de Aula* (PUC, Rio de Janeiro).

Perlman, H. S. e Troup, G. J. 1969 *Is There an Azimuthal Angle Observable?*, American Journal of Physics **37**, 1060.

E. Prugovečki, E. 1981 *Quantum Mechanics in Hilbert Space* (Academic Press, New York), 2ª edição.

Reed, M. e Simon, B. 1980 *Methods of Modern Mathematical Physics*. Vol. I: *Functional Analysis*, Revised and Enlarged Edition (Academic Press, New York).

Reed, M. e Simon, B. 1975 *Methods of Modern Mathematical Physics*. Vol. II: *Fourier Analysis, Self-Adjointness* (Academic Press, New York).

Reid, C. 1986 *Hilbert-Courant* (Springer, New York).

Richards, J. I. e Youn, H. K. 1990 *Theory of Distributions: A Nontechnical Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge).

Richtmyer, R. D. 1978 *Principles of Advanced Mathematical Physics*, Vol. I (Springer, New York).

Riesz, F. e Sz.-Nagy, B. 1955 *Functional Analysis* (Frederick Ungar, New York).

Rosenlicht, M. 1968 *Introduction to Analysis* (Dover, New York).

Ross, K. A. 1980 *Elementary Analysis: The Teory of Calculus* (Springer, New York).

Royden, H. L. 1968 *Real Analysis* (Macmillan, New York), 2ª edição.

Rudin, W. 1973 *Functional Analysis* (McGraw-Hill, New York).

Rudin, W. 1974 *Real and Complex Analysis* (Tata McGraw-Hill, New Delhi), 2ª edição.

Rudin, W. 1976 *Principles of Mathematical Analysis* (McGraw-Hill, New York), 2ª edição.

Schechter, M. 1981 *Operator Methods in Quantum Mechanics* (North-Holland, New York).

Schwartz, L. 1966 *Théorie des Distributions* (Hermann, Paris).

Schwartz, L. 2008 *Mathematics for the Physical Sciences* (Dover, New York).

Smithies, F. 1958 *Integral Equations* (Cambridge University Press, Cambridge).

Solow, D. 2005 *How to Read and Do Proofs* (Wiley, New York).

Spivak, M. 1994 *Calculus* (Publish or Perish, Houston), 3ª edição.

Steen, L. A. 1973 *Highlights in the History of Spectral Theory*, American Mathematical Monthly **80**, 359.

Stone, M. H. 1932 *Linear Transformations in Hilbert Space* (American Mathematical Society, New York).

Streater, R. F. e Wightman, A. S. 1964 *PCT, Spin and Statistics, and All That* (W. A. Benjamin, New York).

Struik, D. J. 1967 *A Concise History of Mathematics* (Dover, New York).

Suppes, P. 1972 *Axiomatic Set Theory* (Dover, New York).

Szekeres, P. 2004 *A Course in Mathematical Physics* (Cambridge University Press, Cambridge).

Takhtajan, L. 2008 *Quantum Mechanics for Mathematicians* (American Mathematical Society, Providence).

Tarski, A. 1995 *Introduction to Logic and the Methodology of Deductive Sciences* (Dover, New York).

Taylor, J. R. 1972 *Scattering Theory* (Wiley, New York).

Teschl, G. 2009 *Mathematical Methods in Quantum Mechanics* (American Mathematical Society, Providence).

Trench, W. F. 2002 *Introduction to Real Analysis* (Prentice Hall, New Jersey). Disponível gratuitamente na Internet: http://ramanujan.math.trinity.edu/wtrench/misc/index.shtml.

Velleman, D. J. 2006 *How To Prove It: A Structured Approach* (Cambridge University Press, Cambridge), 2ª edição.

von Neumann, J. 1955 *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, New Jersey).

Wapner, L. M. 2005 *The Pea and the Sun* (A K Peters, Wellesley).

Yosida, K. 1980 *Functional Analysis* (Springer, New York), 6ª edição.

Zeidler, E. 1995 *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics* (Springer, New York).

Índice remissivo

Título **Convite à Física Matemática**
Produção José Roberto Marinho
Projeto gráfico e composição Casa Editorial Maluhy & Co.
Capa Antonio Manuel Alves Morais
Formato 16 x 23 cm
Tipologia Caslon

Este livro, dirigido a estudantes de graduação e pós-graduação em Física, tem um duplo propósito: servir de introdução ao modo matemático de pensar e de iniciação à física matemática. Com isto em mente, as duas primeiras partes consistem numa introdução à lógica seguida de uma apresentação matematicamente rigorosa dos principais resultados do cálculo de funções de uma variável. A terceira parte é uma exposição das bases da análise funcional, com ênfase na teoria de operadores em espaços de Hilbert e aplicações à mecânica quântica.

www.livrariadafisica.com.br